9. 3. 2007

Příklad: Jaká je pravděpodobnost, že při jednom hodu kostku nepadne šestka? K řešení využijeme následující poznatek: $P(\bar{\mathtt{A}}) = 1 - P(\mathtt{A})$, neboť $(\mathtt{A} \cup \mathtt{B}) = P(\Omega) = 1$.

$\bar{\mathtt{A}}$ . . . na kostce nepadne šestka

$\mathtt{A}$ . . . na kostce padne šestka

$P(\bar{\mathtt{A}}) = 1 - P(\mathtt{A}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

3. Podmíněná pravděpodobnost

Mějme osudí, v něm dvě bílé a dvě černé koule. Z osudí losujeme koule a nevracíme je zpět. S jakou pravděpodobností bude jako druhá koule vytažena bílá? Je šest možností: BBČČ, BČBČ, BČČB, ČBČB, ČČBB, ČBBČ. Ve třech z nich je jako druhá vytažena bílá koule, tedy $P = \frac{1}{2}$. Jestliže víme, že jako první byla vytažena bílá koule, pak pravděpodobnost, že druhá vytažená koule bude bílá, je již pouze $\frac{1}{3}$. To znamená, že informace, že první vytažená koule byla bílá, snížila naději na to, že druhá vytažená koule bude rovněž bílá.

Pravděpodobnost, že nastane jev $\mathtt{A}$ za podmínky, že nastal jev $\mathtt{B}$, se nazývá podmíněná pravděpodobnost $P(\mathtt{A}/\mathtt{B})$ a platí:

$$P(\mathtt{A}/\mathtt{B}) = \frac{P(\mathtt{A} \cap \mathtt{B})}{P(\mathtt{B})}.$$

4. Věta o úplné pravděpodobnosti a Bayesova věta

Zajímá nás pravděpodobnost výskytu jevu $\mathtt{A}$, jestliže známe pravděpodobnosti výskytu tohoto jevu za různých podmínek $P(\mathtt{A}/\mathtt{B}_1)$, $P(\mathtt{A}/\mathtt{B}_2)$, ... , $P(\mathtt{A}/\mathtt{B}_k)$ a také pravděpodobnosti, s jakými tyto podmínky nastanou, tj. $P(\mathtt{B}_1)$, $P(\mathtt{B}_2)$, ... , $P(\mathtt{B}_k)$. Pravděpodobnost jevu $\mathtt{A}$ určíme pomocí následující věty:

4.1. Věta o úplné pravděpodobnosti

Uvažujme systém k disjunktních jevů B_1, ... B_k takových, že $\bigcup_{i=1}^{k} B_i = \Omega$. Pak platí:

$$P(\mathtt{A}) = P(\mathtt{A}/\mathtt{B}_1) \cdot P(\mathtt{B}_1) + P(\mathtt{A}/\mathtt{B}_2) \cdot P(\mathtt{B}_2) + ... + P(\mathtt{A}/\mathtt{B}_k) \cdot P(\mathtt{B}_k)$$

Důkaz: (slabší povahy mohou vynechat) Jev $\mathtt{A}$ lze rozložit na $\mathtt{A} = (\mathtt{A} \cap \mathtt{B}_1) \cup (\mathtt{A} \cap \mathtt{B}_2) \cup ... \cup (\mathtt{A} \cap \mathtt{B}_k)$. Jevy $\mathtt{B}_1, \mathtt{B}_2, ..., \mathtt{B}_k$ jsou jevy vzájemně disjunktní a proto i jevy $\mathtt{A} \cap \mathtt{B}_1, \mathtt{A} \cap \mathtt{B}_2, ..., \mathtt{A} \cap \mathtt{B}_k$ jsou vzájemně disjunktní. Odtud plyne

$$P(\mathtt{A}) = P(\mathtt{A} \cap \mathtt{B}_1) + P(\mathtt{A} \cap \mathtt{B}_2) + ... + (\mathtt{A} \cap \mathtt{B}_k).$$

Z definice podmíněné pravděpodobnosti pro každé $i = 1...k$ platí

$$P(\mathtt{A} \cap \mathtt{B}_1) = P(\mathtt{A}/\mathtt{B}_1) \cdot P(\mathtt{B}_1),$$

odkud již přímo dostáváme (kombinací s výše uvedeným poznatkem):

$$P(\mathtt{A}) = P(\mathtt{A}/\mathtt{B}_1) \cdot P(\mathtt{B}_1) + P(\mathtt{A}/\mathtt{B}_2) \cdot P(\mathtt{B}_2) + ... + P(\mathtt{A}/\mathtt{B}_k) \cdot P(\mathtt{B}_k)$$

Příklad: Na výrobě určité součástky se podílí tři výrobci. První výrobce dodává 50%, další 30% a třetí 20% veškeré produkce. Je známo, že u některých součástek se vyskytne výrobní vada. U prvního výrobce to je u 25% součástek, u druhého výrobce 20% a u posledního 10%. Jaká část celkového množství součástek bude vadná?

$\mathtt{A}$ ... Náhodně vybraná součástka, který vykazuje výrobní vadu.
$\mathtt{B}_1$ ... Náhodně vybraná součástka vyrobená prvním výrobcem.
$\mathtt{B}_2$ ... Náhodně vybraná součástka vyrobená druhým výrobcem.
$\mathtt{B}_3$ ... Náhodně vybraná součástka vyrobená třetím výrobcem.

$P(\mathtt{B}_1) = 0,5; P(\mathtt{B}_2) = 0,3; P(\mathtt{B}_3) = 0,2$
$P(\mathtt{A}/\mathtt{B}_1) = 0,25; P(\mathtt{A}/\mathtt{B}_2) = 0,2; P(\mathtt{A}/\mathtt{B}_3) = 0,1$

$P(\mathtt{A} \cap \mathtt{B}_1) = P(\mathtt{A}/\mathtt{B}_1) \cdot P(\mathtt{B}_1) = 0,25 \cdot 0,5 = 0,125$
$P(\mathtt{A} \cap \mathtt{B}_2) = P(\mathtt{A}/\mathtt{B}_2) \cdot P(\mathtt{B}_2) = 0,2 \cdot 0,3 = 0,06$
$P(\mathtt{A} \cap \mathtt{B}_3) = P(\mathtt{A}/\mathtt{B}_3) \cdot P(\mathtt{B}_3) = 0,1 \cdot 0,2 = 0,02$,což dohromady dává 20,5% všech výrobků.

Příklad: Mějme stejnou situaci jako v předchozí úloze. Jaký je podíl vadných součástek, který je tvořen součástkami dodanými prvním výrobcem?
Vadné součástky, které jsou dodány prvním výrobcem, tvoří 12,5%. Z celkového počtu součástek je 20,5% vadných. Čili pro součástky dodané prvním výrobcem platí:

$P(\mathtt{B}_1/\mathtt{A}) = \frac{P(\mathtt{A} \cap \mathtt{B}_1)}{P(\mathtt{A})} = \frac{P(\mathtt{A}/\mathtt{B}_1)}{P(\mathtt{A})} = 0,6098$

Tedy 60,98% všech vadných součástek je dodáno prvním výrobcem. Jde tedy o podmíněnou pravděpodobnost jevu $\mathtt{B}_1$ za podmínky, že nastal jev $\mathtt{A}$. Součástky dodané prvním výrobcem tvoří 50%.
Apriorní pravděpodobnost jevu $\mathtt{B}_1$ je tedy $P(\mathtt{B}_1) = 0,5$.
Aposteriorní pravděpodobnost jevu $\mathtt{B}_1$ za podmínky, že nastal jev $\mathtt{A}$, je rovna $P(\mathtt{B}_1/\mathtt{A}) = 0,6098$.

4.2. Bayesova věta

(podává způsob výpočtu aposteriorní posloupnosti): Uvažujme systém disjunktních jevů B_1, ... B_k takových, že $\bigcup_{i=1}^{k} B_i = \Omega$. Pak

$$P(\mathtt{B}_j \cap \mathtt{A}) = \frac{P(\mathtt{A}/\mathtt{B}_j)P(\mathtt{B}_j)}{P(\mathtt{A}/\mathtt{B}_1)(\mathtt{B}_1) + ... + P(\mathtt{A}/\mathtt{B}_k)P(\mathtt{B}_k)}.$$

Důkaz: Podle definice je podmíněná pravděpodobnost jevu $\mathtt{B}_j$ za podmínky, že nastane jev $\mathtt{A}$, rovna

$$P(\mathtt{B}_j/\mathtt{A}) = \frac{P(\mathtt{B}_j \cap \mathtt{A})}{P(\mathtt{A})}.$$

Pravděpodobnost $P(\mathtt{B}_j \cap \mathtt{A})$ je rovna $P(\mathtt{A}/\mathtt{B}_j) \cdot P(\mathtt{B}_j)$, a pravděpodobnost jevu $\mathtt{A}$ lze určit pomocí věty o podmíněné pravděpodobnosti, odkud plyne

$$P(\mathtt{A}) = P(\mathtt{A}/\mathtt{B}_1)P(\mathtt{B}_1 + ... + P(\mathtt{A}/\mathtt{B}_k)P(\mathtt{B}_k).$$

Q.E.D.

5. Nezávislost náhodných jevů

Nezávislost dvou jevů $\mathtt{A}$ a $\mathtt{B}$ znamená, že výskyt jevu $\mathtt{A}$ neovlivňuje výskyt jevu $\mathtt{B}$ a naopak. Např. pravděpodobnost padnutí čísla šest na červené nebo modré kostce (viz následující řešený příklad). Naproti tomu počet dopravních nehod při výskytu náledí jsou jevy závislé.

Platí: $P(\mathtt{A}) = P(\mathtt{B}) = \frac{1}{6}, P(\mathtt{A} \cap \mathtt{B}) = P(\mathtt{A}) \cdot P(\mathtt{B}) = \frac{1}{36}$. Jelikož jevy $\mathtt{A}$ a $\mathtt{B}$ jsou nezávislé, pak

$$P(\mathtt{A}/\mathtt{B}) = \frac{P(\mathtt{A} \cap \mathtt{B})}{P(\mathtt{B})} = \frac{P(\mathtt{A}) \cdot P(\mathtt{B})}{P(\mathtt{B})} = P(\mathtt{A}),$$

což znamená, že podmíněná pravděpodobnost je rovna nepodmíněné.

Příklad: Házíme opakovaně kostkou. Předpokládáme, že výsledky jsou při jednotlivých opakovaných hodech nezávislé. S jakou pravděpodobností nám alespoň jedenkrát v pěti hodech padne šestka?

Řešení: $\mathtt{A}$ . . . “V pěti po sobě jedoucích hodech padne alespoň jedna šestka.”

$\bar{\mathtt{A}}$ . . . “V pěti po sobě jdoucích hodech nepadne ani jedna šestka.”

$\mathtt{A}_1$ . . . “V prvním hodu padne šestka.”

$\vdots$

$\mathtt{A}_5$ . . . “Ve pátém hodu padne šestka.”, atd. Jevy $\mathtt{A}_1$, $\mathtt{A}_2$, ... $\mathtt{A}_5$ jsou nezávislé, jejich pravděpodobnost je $\frac{5}{6}$.

$P(\bar{\mathtt{A}}) = P(\mathtt{A}_1 \cap \mathtt{A}_2 \cap ... \cap \mathtt{A}_5) = \left(\frac{5}{6}\right)^5 = 0,402$

$P(\mathtt{A}) = 1 - P(\bar{\mathtt{A}}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^5 = 0,598$