Poissonova rozdělění se často užívá k aporximaci binomického rozdělení, jestliže pro parametry binomického rozdělení platí, že n je velké a p je malé. V tomto případě se konstanta λ pro aporixmaci Poissonovým rozdělením vypočte jako $\lambda = n \cdot p$.

Příklad: Na telefoní ústřednu je připojeno 300 účastníků. Každý z nich bude volat ústřednu s pravděpodobností 0,01. Jaká je pravděpodobnost, že během hodiny zavolají ústřednu 4 účastníci?

Náhodá veličiána X označující počet účastníků volajících v následující hodině ústřednu má binomické rozdělení, tedy pro ni platí:
$P(X = 4) = \binom{300}{4} \cdot 0,01^4 \cdot 0,99^{296}$
Tento výraz není úplně snadné vyčíslit. Naštěstí jej lze aproximovat Poissonovým rozdělením, kde $\lambda = n \cdot p = 300 \cdot 0,01 = 3$. Pak platí:
$P(X = 4) = \frac{\mathrm{e}^{-3} \cdot 3}{4!} \cong 0,168$
(ověřte, že vyčíslením prvního výrazu dojdete k témuž výsledku!).

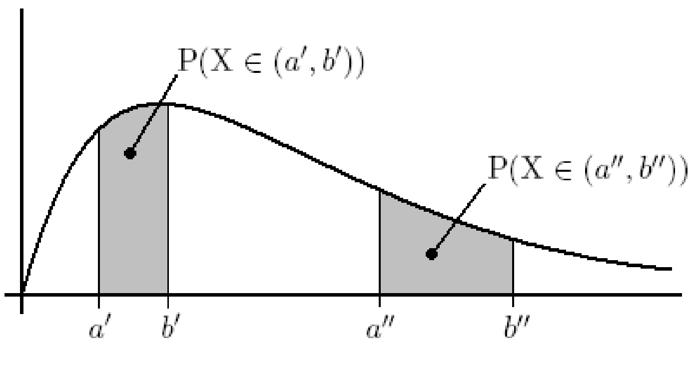
7.5. Spojitá náhodná veličina

Řešíme problém, s jakou pravděpodobností se náhodná veličina realizuje uvnitř nějakého konečného nebo nekonečného intervalu (a, b), tzn. náhodná veličina má rzodělení *spojitého typu*, exisuje-li nezáporná reaálná funkce $f(x)$ taková, že pro libovolný interval (a, b) platí:

$$P(X \in (a, b)) = \int_a^b f(x)dx.$$

Funkce $f(x)$ se nazývá hustota pravděpodobnosti a musí pro ni platit:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$



Distribuční funkce F(x)

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = P(X \in (-\infty, x)).$$

Zároveň platí, že $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ a také $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$. Je také zřejmé, že hustota pravděpodobnosti je derivací distribuce.

Příklad: Autobus přijíždí na zastávku přesně v pětiminutových intervalech. Pán přijde náhodně na zastávku. Nepřijede-li autobus do dvou minut, přijde pán pozdě do zaměstnání. S jakou pravděpodobností přijde pán pozdě do zaměstnání?

Náhodná veličina X je doba čekání na autobus. Tato doba nemůže být menší než nula ani větší než pět minut, tedy $f(x) = 0$ pro $x \in (-\infty, 0) \cup (5, \infty)$. Že bude pán čekat dvě až tři minuty nebo tři až čtyři minuty je stějně pravděpodobné - přišel náhodně. Tato pravděpodobnost je stejná pro libovolný čas z intervalu $(0, 5)$. Na tomto intervalu je tedy funkce $f(x)$ konstantní a musí platit:

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_0^5 f(x)dx = 1$, a proto

$f(x) = \frac{1}{5}$ pro $x \in (0, 5)$ a $f(x) = 0$ všude jinde.

Pán přijde pozdě, jestliže $x > 2$, a tedy

$P(x > 2) = P(x \in (2, 5)) = \int_2^5 \frac{1}{5}dx = \frac{3}{5}$.

Rozdělení spojité náhodné veličny uvádí *hustota.* Lze ji získat z teoretických úvah nebo dlouhodobou zkušeností, tj. empiricky.

7.6. Charakteristiky spojité náhodné veličiny

Střední hodnota - odpovídá dlouhodobému průměru.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx$$

Příklad: Doba vaterie v rocích se řídí rozdělením s hustotou $f(x) = e^{-x}$ pro $x > 0$, $f(x) = 0$ pro $x \leq 0$. Stanovte střední hodnotu.

$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_0^{\infty} x \cdot e^{-x}dx = [-x \cdot e^{-x}]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-x}dx = 1$

Střední doba vybití baterie je tedy jeden rok.

Roztyl

$$\mathrm{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - E(X)]^2 \cdot f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)dx - [E(X)]^2$$

Směrodatná odchylka se jako u diskrétního rozdělení stanoví jako odmocnina z rozpytlu.

Příklad: Stanovte roztyl náhodné veličiny udávající dobu vybití baterie, přičemž hustota této veličiny je stejná jako v předchozím případě.

$\mathrm{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)dx - [E(X)]^2 = \int_0^{\infty} x^2 \cdot e^{-x}dx - 1 = 1$