MILAN VLACH, ZDENĚK KYNCL

NUMERICKÉ VÝPOČTY

PRO I. A II. ROČNÍK
STŘEDNÍCH VŠEOBECNĚ VZDĚLÁVACÍCH ŠKOL
(GYMNÁZIÍ) SE ZAMĚŘENÍM NA PROGRAMOVÁNÍ
A OBSLUHU POČÍTACÍCH STROJŮ

STÁTNÍ
PEDAGOGICKÉ
NAKLADATELSTVÍ
PRAHA

Zpracovali Milan Vlach a Zdeněk Kyncl

Recenzovali doc. inž. Jiří Gregor CSc., prof. dr. František Nožička a Josef Straka

4. nezměněné vydání

Schváleno výnosem ministerstva školství a kultury ze dne 30. července 1965, čj. 32 297/65-II/1 jako učebnice pro I. a II. ročník středních všeobecně vzdělávacích škol se zaměřením na programování a obsluhu počítacích strojů v 1. vydání

I. Neúplná čísla

1. NEÚPLNÁ ČÍSLA

V matematice jste se setkali s různými druhy čísel. Znáte dobře čísla přirozená, celá a racionální. Mnozí z vás i čísla iracionální a reálná. Později se naučíte pracovat i s tzv. čísly komplexními. Při studiu této učebnice vystačíte se znalostí čísel reálných, s kterými se podrobně seznámíte v hodinách matematiky.

Při mnohých výpočtech musíme některá čísla nahrazovat jinými čísly, která vyjadřují původní čísla pouze přibližně. Např. některá racionální čísla nelze vyjádřit ve tvaru ukončeného desetinného čísla.

Např. $\frac{4}{7} = 4{,}0 : 7 = 0{,}571\,428\,5\ \ldots,$

```
      50
       10
        30
         20
          60
           40
```

kde tečky znamenají další číslice.

Také moderní samočinné počítače pracují pouze s čísly, která mají konečný počet číslic, takže musíme často i ukončená desetinná čísla nahrazovat čísly s menším počtem číslic.

Kromě toho se v praxi obvykle setkáváme s čísly, která neznáme přesně a ani nemůžeme znát. Nejčastějším zdrojem takových čísel je měření, neboť každé měření je zatíženo chybami způsobenými nedokonalostí měřicích přístrojů a pozorovatelů.

Je-li A přesná hodnota veličiny a a její přibližná (naměřená) hodnota, pak **skutečná chyba** přibližné hodnoty a je rovna rozdílu $A - a$. Většinou však přesnou hodnotu A neznáme, a nemůžeme tedy přesně určit ani skutečnou chybu přibližné hodnoty a. Abychom viděli, jakým způsobem se vyrovnáme s touto situací, všimněme si blíže postupu při měření veličin.

Měřicí přístroje obsahují zpravidla určitou stupnici a při měření je téměř vyloučeno, aby se ukazatel stupnice přesně kryl s některou dělicí čárkou stupnice. Nezbývá tedy nic jiného, než se spokojit zjištěním, že přesná hodnota A měřené veličiny není menší než jistá hodnota a_1 a není větší než jistá hodnota a_2, tj.

$$a_1 \leqq A \leqq a_2. \tag{1}$$

Interval $\langle a_1, a_2 \rangle$ pak představuje tzv. **neúplné číslo.**

Nahradíme-li číslo A kterýmkoli číslem a z intervalu $\langle a_1, a_2 \rangle$, bude

$$|A - a| \leqq a_2 - a_1$$

a nahradíme-li číslo A číslem $a = \frac{1}{2}(a_1 + a_2)$, bude dokonce

$$|A - a| \leqq \tfrac{1}{2}(a_2 - a_1).$$

Podařilo se nám tedy absolutní hodnotu skutečné chyby odhadnout. Tento odhad nazýváme **absolutní** (prostou) **chybou** příslušné přibližné hodnoty (aproximace).

Při počítání s neúplnými čísly nahrazujeme obvykle neúplné číslo A číslem $\bar{a} = \frac{1}{2}(a_1 + a_2)$, které nazýváme **střední aproximací** neúplného čísla A, a číslo $\alpha = \frac{1}{2}(a_2 - a_1)$, shora omezující skutečnou chybu střední aproximace, nazýváme **absolutní chybou střední aproximace** a píšeme

$$A = \bar{a} \pm \alpha. \tag{2}$$

Takový způsob zápisu neúplného čísla je rovnocenný zápisu pomocí vztahu (1). Neboť známe-li čísla a_1, a_2, dovedeme určit i čísla $\bar{a}$, α, a známe-li čísla $\bar{a}$, α, pak řešením soustavy rovnic

$$\bar{a} = \frac{1}{2}(a_1 + a_2),$$

$$\alpha = \frac{1}{2}(a_2 - a_1)$$

snadno určíme, že

$$a_1 = \bar{a} - \alpha,$$

$$a_2 = \bar{a} + \alpha.$$

Příklad 1. Při vážení jsme zjistili, že vážený předmět není lehčí než 58 g a těžší než 60 g. Určíme střední aproximaci hmoty předmětu a její absolutní chybu: $a_1 = 58$ g, $a_2 = 60$ g; $\frac{1}{2}(58 + 60) = 59$, $\frac{1}{2}(60 - 58) = 1$, a tedy $\bar{a} = 59$ g, $\alpha = 1$ g; hmotu A vyjádříme neúplným číslem (59 ± 1) g.

Absolutní chyba aproximace je ještě nedostatečnou charakteristikou její přesnosti. Uveďme příklad. Změříme-li délku zápalky s přesností na 0,5 cm, tj. $\alpha = 0{,}5$ cm, a změříme-li délku třídy s přesností na 3 cm, tj. $\alpha = 3$ cm, pak absolutní chyba aproximace délky třídy je větší než absolutní chyba aproximace délky zápalky a přesto sotva řekneme, že jsme zápalku změřili přesněji. Kromě toho absolutní chyba je číslo pojmenované a mění se při změně jednotek. To vše nás vede k jiné charakteristice přesnosti aproximace, k tzv. **relativní chybě.**

Nahradíme-li neúplné číslo A číslem a, pak **skutečnou relativní chybou** čísla a nazýváme číslo $\dfrac{A - a}{a}$. Protože skutečnou chybu $A - a$ obvykle neznáme, můžeme absolutní hodnotu skutečné relativní chyby pouze odhadnout a tento odhad nazýváme **relativní chybou** čísla a. Tak pro střední aproximaci a neúplného čísla A bude

$$\left|\frac{A - \bar{a}}{\bar{a}}\right| = \frac{|A - \bar{a}|}{|\bar{a}|} \leqq \frac{\alpha}{|\bar{a}|}.$$

Číslo $\delta = \dfrac{\alpha}{|\bar{a}|}$ je tedy relativní chybou střední aproximace $\bar{a}$ neúplného čísla A*). Praktický význam mají pouze ta neúplná čísla, jejichž relativní chyba je dostatečně malá, např. menší než 0,1 a obvykle ještě mnohem menší. Relativní chybu udáváme někdy v procentech, a to tak, že určíme, kolik procent z příslušné absolutní hodnoty aproximace tvoří absolutní chyba. Vidíme, že

$$\alpha : \frac{|\bar{a}|}{100} = \frac{\alpha}{|\bar{a}|} \cdot 100,$$

a tedy relativní chyba vyjádřená v procentech je stonásobek relativní

*) Mlčky jsme předpokládali, že čísla a, $\bar{a}$ nejsou rovna nule.

chyby. Tak v příkladu 1 bude $\delta = \frac{1}{59} \doteq 0{,}017$ a v procentech 1,7 %.

Ze dvou neúplných čísel považujeme za přesnější to, jehož střední aproximace má menší relativní chybu. Např. neúplné číslo $A = 1\,000 \pm \pm 1{,}2$ je přesnější než neúplné číslo $B = 23{,}5 \pm 0{,}1$, neboť

$$\frac{1{,}2}{1\,000} < \frac{0{,}1}{23{,}5}.$$

Při zápisu neúplného čísla pomocí vztahu (1) nebo vztahu (2) potřebujeme dva údaje: buď čísla a_1, a_2, nebo čísla $\bar{a}$, α. Avšak neúplné číslo lze zapisovat i jediným číselným údajem, který ovšem závisí na absolutní chybě. K tomu nám slouží pojem platné číslice.

Číslici určité aproximace neúplného čísla nazveme **platnou číslicí,** jestliže absolutní chyba aproximace není větší než jednotka řádu uvažované číslice. Tato definice se nevztahuje na nuly nalevo od první nenulové číslice.

Např. neúplná čísla $(23{,}89 \pm 0{,}07)$, $(0{,}012\,490\,3 \pm 0{,}000\,04)$, $(290\,000 \pm 350)$ mají tři platné číslice.

Zřejmě všechny nenulové číslice nalevo od platné číslice jsou také platnými číslicemi.

Dohodneme-li se nyní zapisovat neúplná čísla tak, že v jejich aproximacích budeme zapisovat pouze platné číslice, dovedeme z takového zápisu snadno odhadnout chybu (není větší než jednotka řádu poslední napsané číslice). Je-li počet platných číslic menší než počet číslic před desetinnou čárkou, zapíšeme pouze platné číslice a vzniklé číslo násobíme vhodnou mocninou deseti. Např. číslo $(290\,000 \pm 350)$ mající tři platné číslice zapíšeme: $290 \,.\, 10^3$. S tímto zápisem čísel (nejen neúplných), tj. se zápisem ve tvaru čísla s naznačeným násobením mocninou deseti, s jeho výhodami, nevýhodami a použitím, se ještě blíže seznámíte, až se budete zabývat číselnými soustavami a programováním.

V definici platné číslice jsme požadovali, aby absolutní chyba příslušné aproximace nebyla větší než jednotka řádu uvažované číslice. Místo toho jsme mohli požadovat, aby absolutní chyba nebyla větší než polovina jednotky řádu uvažované číslice nebo než jiný ω-násobek (kde $\frac{1}{2} \leqq \omega \leqq 1$) jednotky příslušného řádu. Pak ovšem o tom, zda číslice je platná, rozhoduje nejen absolutní chyba aproximace, ale i volba čísla ω.

2. ZAOKROUHLOVÁNÍ

Jedním ze zdrojů neúplných čísel je také zaokrouhlování. Zaokrouhlujeme buď na určitý počet desetinných míst, nebo na určitý počet platných číslic. Pochopitelně se snažíme udělat při zaokrouhlování co nejmenší chybu; k tomu nám slouží známé pravidlo: Je-li první zanedbaná číslice menší než pět, pak ponechané číslice neměníme (sestupné zaokrouhlování), je-li první zanedbaná číslice větší nebo rovna pěti, pak poslední ponechanou číslici zvětšíme o jednotku (vzestupné zaokrouhlování). Tím dosáhneme toho, že chyba zaokrouhlení nebude větší než polovina jednotky řádu poslední zachované číslice. Je-li první zanedbaná číslice 5 a za ní následují samé nuly, dopustíme se při vzestupném i sestupném zaokrouhlování stejné chyby. Obě zaokrouhlení jsou v tomto případě stejně oprávněná a abychom nedávali přednost pouze vzestupnému zaokrouhlení, snažíme se zaokrouhlovat náhodně. Proto si uvedené pravidlo ještě doplníme: Je-li v uvažovaném případě před zanedbanou číslicí 5 sudá číslice, zaokrouhlujeme sestupně, v opačném případě vzestupně. Uvedené pravidlo zaokrouhlování nepoužíváme vždy a všude, mohli bychom se tím dopustit i nepřípustných omylů. Například z významu absolutní a relativní chyby plyne, že tyto chyby zaokrouhlujeme vždy vzestupně. Rovněž některé samočinné počítače jsou konstruovány tak, že zaokrouhlují vždy sestupně nebo vždy vzestupně.

Skutečnou chybu zaokrouhlení zjistíme podle zanedbaných číslic tak, že zaokrouhlované číslo považujeme za přesné (číslo považujeme za přesné, je-li jeho absolutní chyba rovna nule). Někdy skutečnou chybu zaokrouhlení nezjišťujeme a spokojíme se tím, že není větší než polovina jednotky řádu poslední zachované číslice. Zaokrouhlujeme-li přesné číslo, pak tento odhad můžeme považovat za absolutní chybu získaného čísla, a zaokrouhlujeme-li neúplné číslo, pak absolutní chyba získaného čísla bude o tento odhad větší než absolutní chyba původního neúplného čísla.

Příklad 2. Zaokrouhlíme číslo 0,020 25 na tři desetinná místa a číslo 2 876 672 na čtyři platné číslice:

$0{,}020\,25 = 0{,}020 \pm 0{,}000\,5$; skutečná chyba zaokrouhlení je 0,000 25;

2 876 672 $\doteq$ 2 877 . 10^3; absolutní hodnota skutečné chyby zaokrouhlení je rovna 328.

Podle naší úmluvy o zápisu pomocí platných číslic nebude absolutní chyba čísla 2 877 . 10^3 větší než 1 000.

Příklad 3. Zaokrouhlíme číslo $A = 3{,}762\,2 \pm 0{,}012\,1$ a číslo $B = 12{,}512\,3 \pm 0{,}021\,1$ tak, abychom zachovali co největší počet platných číslic.

Zaokrouhlíme-li prvé číslo na 3,8, nebude absolutní chyba tohoto čísla větší než $0{,}05 + 0{,}012\,1 = 0{,}062\,1$, a protože $0{,}062\,1 \leqq 0{,}1$, jsou obě číslice platné. Absolutní chyba čísla A je 0,012 1, a to je větší než 0,01 a číslo A nelze zaokrouhlit na více než jedno desetinné místo tak, aby všechny číslice byly platné. Stejným způsobem zjistíme, že číslo B musíme zaokrouhlit na 12,5.

3. POČÍTÁNÍ S NEÚPLNÝMI ČÍSLY

Neúplná čísla jsou určena dvojicí čísel. Proto počítání s neúplnými čísly je v podstatě počítání s dvojicemi čísel. Odvodíme si několik pravidel pro jednoduché početní výkony.

Nechť $\langle a_1, a_2\rangle$, $\langle b_1, b_2\rangle$ jsou intervaly určující neúplná čísla A, B, jejichž střední aproximace jsou $\bar{a}$, $\bar{b}$*) a absolutní chyby α, β, tj.

$$a_1 \leqq A \leqq a_2, \qquad A = \bar{a} \pm \alpha,$$
či
$$b_1 \leqq B \leqq b_2, \qquad B = \bar{b} \pm \beta.$$

Sečtením těchto nerovností dostaneme vztah určující neúplné číslo $A + B$

$$a_1 + b_1 \leqq A + B \leqq a_2 + b_2.$$

Střední aproximace tohoto součtu bude

$$\frac{(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2)}{2} = \frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{b_1 + b_2}{2} = \bar{a} + \bar{b}$$

a absolutní chyba této střední aproximace bude

$$\frac{(a_2 + b_2) - (a_1 + b_1)}{2} = \frac{a_2 - a_1}{2} + \frac{b_2 - b_1}{2} = \alpha + \beta.$$

*) Pro jednoduchost odvozování budeme předpokládat, že střední aproximace $\bar{a}$, $\bar{b}$ jsou kladná čísla; ostatní případy si rozeberete sami.

Tím jsme získali výsledek:

Střední aproximace součtu dvou neúplných čísel je rovna součtu středních aproximací sčítanců a její absolutní chyba je rovna součtu absolutních chyb středních aproximací jednotlivých sčítanců.

Opačné číslo k číslu B je určeno intervalem $\langle -b_2, -b_1\rangle$. Sečtením nerovností

$$a_1 \leqq A \leqq a_2,$$
$$b_2 \leqq -B \leqq -b_1$$

získáme pro neúplné číslo $A - B$ vztah

$$a_1 - b_2 \leqq A - B \leqq a_2 - b_1.$$

Střední aproximace a její absolutní chyba pak budou čísla:

$$\frac{(a_1 - b_2) + (a_2 - b_1)}{2} = \frac{a_1 + a_2}{2} - \frac{b_1 + b_2}{2} = \bar{a} - \bar{b},$$

$$\frac{(a_2 - b_1) - (a_1 - b_2)}{2} = \frac{a_2 - a_1}{2} + \frac{b_2 - b_1}{2} = \alpha + \beta.$$

Střední aproximace rozdílu dvou neúplných čísel je rovna rozdílu jejich středních aproximací a její absolutní chyba je rovna součtu absolutních chyb středních aproximací menšitele a menšence.

Podle definice relativní chyby budou relativní chyby součtu a rozdílu rovny číslům*)

$$\frac{\alpha + \beta}{|\bar{a} + \bar{b}|}, \qquad \frac{\alpha + \beta}{|\bar{a} - \bar{b}|}.$$

Z tohoto vyjádření relativních chyb snadno dospějeme k závěru, že:

Relativní chyba rozdílu může být i při malých relativních chybách menšence i menšitele velmi velká, v závislosti na tom, jak velký je rozdíl středních aproximací.

*) Předpokládáme $|\bar{a} - \bar{b}| \neq 0$.

Proto se snažíme uspořádat výpočty tak, abychom se vyhnuli odečítání navzájem blízkých neúplných čísel.

Příklad 4. Sečteme čísla $(3{,}22 \pm 0{,}02)$, $(1{,}014\,8 \pm 0{,}000\,2)$, $(9{,}6 \pm \pm 0{,}1)$. Snadno si sami odvodíte, že pravidlo o sčítání absolutních chyb platí i v případě tři sčítanců. Sečteme střední aproximace a absolutní chyby:

$$\begin{array}{rcr} 3{,}22 & \qquad & 0{,}02 \\ 1{,}014\,8 & & 0{,}000\,2 \\ 9{,}6 & & 0{,}1 \\ \hline 13{,}834\,8 & & 0{,}120\,2 \end{array}$$

Hledaný součet bude $13{,}834\,8 \pm 0{,}120\,2$. Zaokrouhlením na jedno desetinné místo získáme číslo $13{,}8 \pm (0{,}120\,2 + 0{,}034\,8) = 13{,}8 \pm 0{,}16$, kde jsme absolutní chybu zaokrouhlili na dvě desetinná místa.

Výpočet se zjednoduší, zaokrouhlíme-li nejdříve všechny sčítance na stejný počet desetinných míst. Ponechání zbytečných desetinných míst u části sčítanců pouze komplikuje výpočet a přitom nezvyšuje přesnost. V našem příkladě tak získáme, s přihlédnutím k chybě zaokrouhlení, následující výsledek:

$$\begin{array}{r} 3{,}2 \pm 0{,}04 \\ 1{,}0 \pm 0{,}02 \\ 9{,}6 \pm 0{,}10 \\ \hline 13{,}8 \pm 0{,}16 \end{array}$$

Příklad 5. Určíme rozdíl čísel $5{,}874 \pm 0{,}00\,6$ a $2{,}342 \pm 0{,}000\,6$.

$$\begin{array}{r} 5{,}874 \pm 0{,}000\,6 \\ -2{,}342 \pm 0{,}000\,6 \\ \hline 3{,}532 \pm 0{,}001\,2 \end{array}$$

Všimneme si, že výchozí čísla měla všechny číslice platné, kdežto poslední číslice výsledku již není platná.

Označme relativní chyby*) středních aproximací čísel A, B symboly

$$\delta_A,\ \delta_B,\ \text{tj.}\ \ \delta_A = \frac{\alpha}{\bar{a}},\ \delta_B = \frac{\beta}{\bar{b}}.$$

*) Připomeňme předpoklad ze str. 7, že relativní chyby jsou malá čísla.

Potom

$$A = \bar{a} \pm \alpha = \bar{a}\left(1 \pm \frac{\alpha}{\bar{a}}\right) = \bar{a}(1 \pm \delta_A),$$

$$B = \bar{b} \pm \beta = \bar{b}\left(1 \pm \frac{\beta}{\bar{b}}\right) = \bar{b}(1 \pm \delta_B)$$

čili

$$\bar{a}(1 - \delta_A) \leqq A \leqq \bar{a}(1 + \delta_A),$$

$$\bar{b}(1 - \delta_B) \leqq B \leqq \bar{b}(1 + \delta_B).$$

Podle předpokladu jde o nerovnosti mezi kladnými čísly a jejich vynásobením získáme nerovnosti

$$\bar{a}\bar{b}(1 - \delta_A)(1 - \delta_B) \leqq A \,.\, B \leqq \bar{a}\bar{b}(1 + \delta_A)(1 + \delta_B),$$

$$\bar{a}\bar{b}(1 - \delta_A - \delta_B + \delta_A\delta_B) \leqq A \,.\, B \leqq \bar{a}\bar{b}(1 + \delta_A + \delta_B + \delta_A\delta_B).$$

Součin $\delta_A \,.\, \delta_B$ nyní zanedbáme, neboť podle předpokladu jsou relativní chyby δ_A, δ_B malá čísla.

Dostaneme tak vztah

$$\bar{a}\bar{b}[1 - (\delta_A + \delta_B)] \leqq A \,.\, B \leqq \bar{a}\bar{b}[1 + (\delta_A + \delta_B)]$$

čili

$$A \,.\, B = \bar{a}\bar{b}[1 \pm (\delta_A + \delta_B)].$$

Tento výsledek nás opravňuje k tomu, abychom za relativní chybu střední aproximace součinu $A \,.\, B$ považovali součet relativních chyb středních aproximací činitelů. Budeme tedy psát

$$\delta_{A \cdot B} = \delta_A + \delta_B.$$

Podle definice relativní chyby bude absolutní chyba střední aproximace součinu rovna číslu

$$\bar{a}\bar{b}(\delta_A + \delta_B) = \bar{a}\bar{b}\left(\frac{\alpha}{\bar{a}} + \frac{\beta}{\bar{b}}\right) = \alpha\bar{b} + \beta\bar{a}.$$

Pokusme se nyní určit relativní chybu střední aproximace čísla $\frac{1}{B}$. Položíme $\frac{1}{B} = C$ a označíme absolutní chybu střední aproximace $\bar{c}$ symbolem γ, tzn.

$$\bar{c} - \gamma \leqq C \leqq \bar{c} + \gamma.$$

Ze vztahu $\bar{b} - \beta \leqq B \leqq \bar{b} + \beta$ plyne vztah $\dfrac{1}{\bar{b} + \beta} \leqq \dfrac{1}{B} \leqq \dfrac{1}{\bar{b} - \beta}$.

Odtud však plyne, že $\bar{c} - \gamma = \dfrac{1}{\bar{b} + \beta}$ a $\bar{c} + \gamma = \dfrac{1}{\bar{b} - \beta}$

čili
$$(\bar{c} - \gamma)(\bar{b} + \beta) = 1 \text{ a } (\bar{c} + \gamma)(\bar{b} - \beta) = 1.$$

Tedy $(\bar{c} - \gamma)(\bar{b} + \beta) = (\bar{c} + \gamma)(\bar{b} - \beta)$, z čehož plyne $\bar{c}\beta - \gamma\bar{b} = -\bar{c}\beta + \gamma\bar{b}$ a odtud $\dfrac{\beta}{\bar{b}} = \dfrac{\gamma}{\bar{c}}$, či slovy:

Relativní chyba střední aproximace čísla $\dfrac{1}{B}$ je rovna relativní chybě střední aproximace čísla B.

Odtud již převedením dělení $\dfrac{A}{B}$ na násobení $A \cdot \dfrac{1}{B}$ dospíváme k závěru, že **relativní chyba střední aproximace podílu je vyjádřena součtem relativních chyb středních aproximací dělence a dělitele.**

Příklad 6. Určíme součin $A \cdot B$ čísel $A = 32{,}5 \pm 0{,}05$, $B = 0{,}12 \pm \pm 0{,}005$:

$$\bar{a}\bar{b} = 32{,}5 \cdot 0{,}12 = 3{,}9$$

$$\alpha\bar{b} + \beta\bar{a} = 0{,}05 \cdot 0{,}12 + 0{,}005 \cdot 32{,}5 \doteq 0{,}17, \quad \text{tj.} \quad AB = 3{,}9 \pm 0{,}17.$$

Příklad 7. Určíme podíl $\dfrac{\sqrt{5}}{\pi}$ a jeho relativní chybu v případě, že čísla $\sqrt{5}$, π jsou dána s jedním desetinným místem.

Pomocí tabulek nalezneme

$$\sqrt{5} = 2{,}2 \pm 0{,}05, \qquad \pi = 3{,}1 \pm 0{,}05.$$

Odtud
$$2{,}2 : 3{,}1 \doteq 0{,}71 \quad \text{a} \quad \delta = \frac{0{,}05}{2{,}2} + \frac{0{,}05}{3{,}1} \doteq 0{,}04$$

a relativní chyba výsledku 0,71 není větší než 4 %.

Má-li při násobení neúplných čísel některý z činitelů relativní chybu větší než ostatní činitelé, je podle uvedených pravidel relativní chyba součinu určena především relativní chybou tohoto méně přesného činitele. Proto můžeme (podobně jako u sčítání) výpočty zjednodušit tím, že přesnější činitele zaokrouhlíme tak, aby počet jejich platných číslic byl pouze o jednu nebo dvě číslice větší než počet platných číslic nejméně přesného činitele.

Jestliže jedno z čísel A, B je přesné (úplné), pak se jeho absolutní i relativní chyba rovná nule a pravidla pro výpočet chyb součtu, rozdílu, součinu a podílu se zjednoduší. Například je-li v součinu AB činitel A přesné číslo, pak pro relativní chybu součinu δ_{AB} získáme vztah

$$\delta_{AB} = \delta_A + \delta_B = 0 + \delta_B = \delta_B,$$

tj. **při násobení neúplného čísla úplným číslem se relativní chyba nemění.** Absolutní chyba bude v tomto případě dána výrazem

$$\alpha\bar{b} + \beta\bar{a} = 0 \cdot \bar{b} + \beta\bar{a} = \beta\bar{a}.$$

Jako cvičení si odvoďte sami, jak se v tomto případě mění pravidla pro ostatní probrané početní výkony.

Pravidla pro počítání s neúplnými čísly, která jsme odvodili, jsou velmi jednoduchá, avšak mají tu nevýhodu, že dávají příliš hrubé odhady chyb. Například při sčítání většího počtu neúplných čísel by skutečná chyba součtu byla rovna absolutní chybě součtu pouze v tom případě, že skutečné chyby všech sčítanců jsou rovny jejich absolutním chybám a že při sčítání nedochází k vzájemné kompenzaci těchto chyb. Takový případ se při sčítání většího počtu neúplných čísel prakticky nevyskytuje. Jako příklad uvedeme následující pokus. Sečteme logaritmy dvaceti čísel nalezených v pětimístných tabulkách. Podle našich pravidel bude absolutní chyba součtu, vyjádřená v jednotkách sedmého řádu za desetinnou čárkou, rovna 50 . 20 = 1 000. Avšak opakované praktické výpočty ukázaly něco zcela jiného. Výsledky série 440 pokusů jsou uvedeny v tabulce.

Absolutní chyba	Počet součtů v %
0 — 100,5	65 %
100,5— 200,5	28 %
200,5— 300,5	6 %
300,5— 400,5	1 %
400,5—1000,5	0 %

Proto byly vypracovány i jiné způsoby odhadu chyb, založené na počtu pravděpodobnosti, s jehož základy se seznámíte ve 3. ročníku. Uveďme zde alespoň jeden vzorec.

Sečítáme-li větší počet čísel $A_1, A_2, \ldots, A_n (n > 10)$ se stejnou absolutní chybou α, lze odhadnout absolutní chybu součtu číslem $\alpha\sqrt{3n}$.

Při pouhých orientačních výpočtech se můžeme řídit následujícími praktickými pravidly, umožňujícími provádět operace s neúplnými čísly podle počtu platných číslic. Musíme mít ovšem na paměti, že tato pravidla nedávají odhad chyby výsledku a nezaručují, že poslední číslice výsledku je platná.

1. V součtu a rozdílu ponecháme tolik číslic za desetinnou čárkou, kolik jich má sčítanec s nejmenším počtem platných číslic za desetinnou čárkou.

2. V součinu a podílu ponecháme tolik číslic, kolik jich má neúplné číslo s nejmenším počtem platných číslic.

3. Ve všech mezivýsledcích ponecháme o jednu nebo dvě číslice více, než doporučují pravidla 1 a 2.

Odvodili jsme zde pravidla pro základní početní výkony (sčítání, odčítání, násobení a dělení) s neúplnými čísly. Je dobré si uvědomit, co tato pravidla představují.

Každé neúplné číslo je charakterizováno dvojicí čísel (připomeňme vztahy (1) a (2)), a počítání s neúplnými čísly je tedy počítání s dvojicemi čísel. Vyjdeme-li ze vztahu (1), můžeme potřebné výpočty převést na výpočty pomocí nerovností. Tak jsme také odvodili jednotlivá pravidla. Mohli bychom se bez těchto pravidel obejít a provádět pokaždé (např. při každém násobení) výpočty pomocí nerovností. Je zbytečné zdůrazňovat, že tento způsob je neekonomický, a proto jsme odvodili určitá pravidla.

Chceme-li provádět s neúplnými čísly i jiné početní výkony (např. odmocňování) a neznáme-li příslušná pravidla pro tyto výkony, musíme se např. vrátit ke vztahu (1) a provést žádané výkony na základě počítání s nerovnostmi.

Příklad 8. Jak velký musí být poloměr kruhu, nemá-li se obsah kruhu odchylovat od 200 cm² o více než 1 %?

Ze zadání příkladu plyne vztah:

$$198 \leq \pi r^2 \leq 202.$$

Postupně získáme nerovnosti:

$$\sqrt{\frac{198}{\pi}} \leq r \leq \sqrt{\frac{202}{\pi}},$$

$$\sqrt{63{,}02} \leq r \leq \sqrt{64{,}33},$$

$$7{,}938 \leq r \leq 8{,}021.$$

A odtud, po zaokrouhlení střední aproximace a absolutní chyby, dostaneme výsledek $r = (7{,}98 \pm 0{,}05)$ cm.

CVIČENÍ

1. Jaká číslice se vyskytuje ve vyjádření čísla $\frac{4}{7}$ z úvodního příkladu na 58. místě za desetinnou čárkou?

2. Racionální číslo $\frac{a}{2^r 5^s}$ v základním tvaru, kde r, s jsou nezáporná celá čísla, lze vyjádřit jako desetinné číslo, mající právě r desetinných míst, je-li $r \geqq s$, a právě s desetinných míst, je-li $r \leqq s$. Dokažte.

3. Číslo $\frac{12}{25}$ nahradíme číslem $\frac{1}{2}$. Jaká bude absolutní chyba?

4. Určete relativní chyby čísel $5{,}26 \pm 0{,}02$; $25{,}2 \pm 0{,}12$; $3{,}55 \pm 0{,}02$.

5. Při měření délky s přesností na 5 m jsme získali 23,37 km a při měření jiné délky s přesností na 0,5 cm jsme získali 3 m. Které měření je lepší?

6. Které z čísel $\pi \doteq 3{,}142$; $e \doteq 2{,}718$ je přesnější?

7. Číslo 7,75 bylo určeno s relativní chybou 0,5 %. Určete jeho absolutní chybu.

8. Určete relativní chybu čísel 2,718 2; 3,14, jejichž všechny číslice jsou platné.

9. Určete počet platných číslic čísla 9,873 5, je-li jeho relativní chyba rovna 0,001 %.

10. Určete součin čísel $2{,}56 \pm 0{,}005$; $1{,}2 \pm 0{,}05$.

11. Určete podíl $\dfrac{2{,}8 \pm 0{,}3}{25{,}8 \pm 0{,}05}$.

12. Určete rozdíl $\pi - \cos 25°$ s absolutní chybou nepřevyšující 0,001.

13. Určete podíl $\frac{5}{7}$ s relativní chybou 0,3 %.

14. Sečtěte neúplná čísla 2 354; 746 . 10; 118 . 10^2.

15. Určete relativní chybu a počet platných číslic obsahu S obdélníka o stranách $a = (92{,}73 \pm 0{,}005)$ km, $b = (9{,}452 \pm 0{,}000\,5)$ km.

16. Na píst o průměru $(200 \pm 0{,}05)$ mm působí pára tlakem $p = (8{,}2 \pm 0{,}1)$ at. Jakou silou F působí pára na píst? Určete také relativní chybu výsledku.

17. Určete gravitační zrychlení na povrchu planety Jupiter, je-li podle údajů v tabulkách poloměr této planety $r = (6{,}96 \pm 0{,}23) \,.\, 10^7$ m, hmota zaokrouhlená na dvě platné číslice $1{,}9 \,.\, 10^{27}$ kg a gravitační konstanta zaokrouhlená na tři číslice $\varkappa = 6{,}67 \,.\, 10^{-11}\ \mathrm{m^3\,kg^{-1}s^{-2}}$.

18. Určete hustotu planety Jupiter.

19. Příklady 17 a 18 řešte i pro jiné planety. Potřebné údaje najdete v tabulkách.

20. S jakým výkonem pracuje vařič a jaký je odpor topné spirály, bylo-li naměřeno $U = (220 \pm 2)$ V, $I = (5 \pm 0{,}4)$ A?

II. Řešení soustav lineárních rovnic

1. GAUSSOVA ELIMINAČNÍ METODA

A. OPAKOVÁNÍ

Na několika příkladech si zopakujeme řešení soustav dvou a tří rovnic o 2 a 3 neznámých pomocí metody **sčítací** a **dosazovací**.

Příklad 1. Elektrolytem v akumulátoru NiFe je roztok KOH o hustotě $\varrho = 1{,}14\ \mathrm{g/cm^3}$. Kolik destilované vody a roztoku KOH o hustotě $\varrho_2 = 1{,}5\ \mathrm{g/cm^3}$ musíme smíchat, je-li objem akumulátoru, v němž potřebujeme vyměnit elektrolyt, $V = \frac{1}{2}$ l?

Označíme-li objem destilované vody x a objem roztoku o hustotě ϱ_2 y, platí
$$x + y = 500. \qquad [\mathrm{cm^3}]$$
Hmota destilované vody je $m_1 = \varrho_1 x$, kde $\varrho_1 = 1\ [\mathrm{g/cm^3}]$ a hmota použitého roztoku je $m_2 = \varrho_2 y$ a hmota elektrolytu je $m = \varrho V$. Hmota elektrolytu je rovna součtu hmot destilované vody a použitého roztoku, tj. $m_1 + m_2 = m$ a dosadíme-li za m_1, m_2 a m, dostaneme
$$x + 1{,}5y = 500 \,.\, 1{,}14, \qquad [\mathrm{g,\ cm^3}]$$
Rovnici ještě upravíme tak, že obě strany vynásobíme dvěma, abychom odstranili desetinná čísla. Pro hledané objemy x, y máme tedy soustavu dvou rovnic o dvou neznámých
$$\begin{aligned} x + y &= 500,\\ 2x + 3y &= 1\,140. \end{aligned}$$
Nejdříve vypočítáme metodou sčítací neznámou y. Obě strany první rovnice vynásobíme číslem -2 a přičteme k příslušným stranám druhé rovnice:
$$\begin{array}{rcr} -2x - 2y &=& -1\,000\\ 2x + 3y &=& 1\,140\\ \hline y &=& 140 \end{array} \qquad [\mathrm{cm^3}]$$

Dosadíme-li za y do první rovnice, dostáváme $x = 360\ \mathrm{cm^3}$. K vytvoření $\frac{1}{2}$ l elektrolytu do akumulátoru NiFe musíme tedy smíchat $360\ \mathrm{cm^3}$ destilované vody a $140\ \mathrm{cm^3}$ roztoku KOH o hustotě $1{,}14\ \mathrm{g/cm^3}$.

Příklad 2. Řešte soustavu

$$\begin{aligned} 6x - 5y + 3z &= 50, \\ 4x + 3y - 2z &= 40, \\ 3x + 2y + 5z &= 220. \end{aligned}$$

Metodou sčítací vyloučíme z první a druhé rovnice x. Obě strany první rovnice vynásobíme -2 a obě strany druhé rovnice vynásobíme 3:

$$\begin{aligned} -12x + 10y - 6z &= -100, \\ 12x + 9y - 6z &= 120. \end{aligned}$$

Sečtením dostaneme rovnici

$$19y - 12z = 20.$$

Nyní vynásobíme obě strany první rovnice -1 a obě strany třetí rovnice dvěma a po sečtení dostaneme opět rovnici s dvěma neznámými y, z

$$9y + 7z = 390.$$

Soustavu dvou rovnic o dvou neznámých

$$\begin{aligned} 19y - 12z &= 20, \\ 9y + 7z &= 390 \end{aligned}$$

vyřešíme metodou dosazovací. Z druhé rovnice soustavy vyjádříme

$$y = \frac{390 - 7z}{9}$$

a dosadíme do první

$$19\,\frac{390 - 7z}{9} - 12z = 20.$$

Vznikla rovnice o jedné neznámé z, jejímž řešením je $z = 30$. Dosazením do jedné z obou rovnic o dvou neznámých za z vypočítáme $y = 20$ a dosazením za y a z do kterékoli rovnice původní soustavy vypočítáme x, takže řešení soustavy je

$$x = 10, \quad y = 20, \quad z = 30.$$

Zkouška:
$$\begin{aligned} L_1 &= 60 - 100 + 90 = 50, & P_1 &= 50, & L_1 &= P_1 \\ L_2 &= 40 + 60 - 60 = 40, & P_2 &= 40, & L_2 &= P_2 \\ L_3 &= 30 + 40 + 150 = 220, & P_3 &= 220, & L_3 &= P_3 \end{aligned}$$

Příklad 3. Řešte soustavu

$$\begin{aligned} 2x + y - 3z &= 1, \\ -5x + 5y + 9z &= 2, \\ x + 3y - z &= 2. \end{aligned}$$

Metodou sčítací vyloučíme pomocí první rovnice neznámou y z druhé a třetí rovnice. Dostáváme soustavu

$$\begin{aligned} 5x - 8z &= 1, \\ 5x - 8z &= 1. \end{aligned}$$

Této soustavě vyhovuje nekonečně mnoho řešení. Za z si můžeme zvolit libovolné číslo α. Potom řešením soustavy je každá trojice čísel

$$x = \frac{8\alpha + 1}{5}, \; y = \frac{3 - \alpha}{5}, \; z = \alpha,$$

např. $\left(\frac{9}{5}, \frac{2}{5}, 1\right)$ nebo $(-3, 1, -2)$ atd. Provedte zkoušku.

Příklad 4. Řešte soustavu

$$\begin{aligned} x - 4y + 2z &= 1, \\ 6x + 6y + 7z &= 3, \\ 2x - 2y + 3z &= 2. \end{aligned}$$

Obě strany třetí rovnice vynásobíme dvěma a odečteme od příslušných stran první rovnice. Potom vynásobíme obě strany třetí rovnice třemi a přičteme k oběma stranám druhé rovnice. Tak vyloučíme z první a druhé rovnice neznámou y a dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} -3x - 4z &= -3, \\ 12x + 16z &= 9. \end{aligned}$$

Vynásobíme-li obě strany první rovnice této soustavy čtyřmi a přičteme k příslušným stranám druhé rovnice, dostaneme rovnici

$$0 \, . \, x + 0 \, . \, z = -3.$$

Tato rovnice není splněna pro žádné x a z. Soustava tedy nemá řešení.

CVIČENÍ

Řešte soustavy:

1. $$\begin{aligned} x + y \phantom{{}+z} &= 37\\ x \phantom{{}+y} + z &= 25\\ y + z &= 22 \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} 3x + 2y + 3z &= 110\\ 5x - y - 4z &= 0\\ 2x - 3y + z &= 0 \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} x + 2y + 5z &= 1\\ 3x + 4y + 7z &= 2\\ 6x + 8y + 9z &= 4 \end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned} 2x + 3y \phantom{{}+2z} &= 12\\ 3x \phantom{{}+3y} + 2z &= 11\\ 3y + 4z &= 10 \end{aligned}$$

5. $$\begin{aligned} x + y \phantom{{}-z} &= 13\\ x \phantom{{}+y} - z &= 5\\ y - z &= 2 \end{aligned}$$

6. $$\begin{aligned} x + y \phantom{{}+z} &= 3\\ x \phantom{{}+y} + z &= 4\\ y + z &= 5 \end{aligned}$$

7. $$\begin{aligned} 2x + 3y \phantom{{}+2z} &= 11\\ 3x \phantom{{}+3y} + 2z &= 13\\ 3y + 4z &= 29 \end{aligned}$$

8. $$\begin{aligned} x + y - z &= 17\\ x - y + z &= 13\\ -x + y + z &= 7 \end{aligned}$$

9. $$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 5\\ 3x + 6y - 4z &= 12\\ x + 2y + 2z &= 20 \end{aligned}$$

10. $$\begin{aligned} x - y - z &= 5\\ -x + y - z &= 1\\ -x - y + z &= -15 \end{aligned}$$

11. $$\begin{aligned} 5x + 5y + z &= 2\\ 3x - 4y - 3z &= 1\\ -2x + y + z &= -1 \end{aligned}$$

12. $$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 6\\ -3x + y + 3z &= 7\\ -x + 5y - 3z &= 9 \end{aligned}$$

13. $$\begin{aligned} 2x + 3y + 4z &= 290\\ 3x + 4y + 5z &= 380\\ 4x + 5y + 7z &= 510 \end{aligned}$$

14. $$\begin{aligned} 4x + 6y + 2z &= 2\\ 2x + 3y + z &= 1\\ 8x + 12y + 4z &= 4 \end{aligned}$$

15. $$\begin{aligned} 2x - 2y - 3z &= 1\\ x + 4y + 2z &= 7\\ 3x - y + z &= 0 \end{aligned}$$

16. $$\begin{aligned} x - y \phantom{{}+z} &= 1\\ y - z &= -2\\ -x \phantom{{}+y} + z &= 1 \end{aligned}$$

17. $$\begin{aligned} 2x + 3y + 10z &= 1\\ -5x + y - 7z &= 6\\ 3x - 2y - 6z &= -5 \end{aligned}$$

18. $$\begin{aligned} 3x - 5y + z &= 11\\ x + 3y - 4z &= -10\\ 7x - y + 2z &= 4 \end{aligned}$$

19. $$\begin{aligned} 5x + 2y + z &= 7\\ 3x + 3y + 3z &= 2\\ 5x + 2y + z &= 1 \end{aligned}$$

20. $$\begin{aligned} 5x + 5y + z &= 2\\ 3x - 4y - 3z &= 1\\ -2x + y + z &= -1 \end{aligned}$$

21. $$\begin{aligned} 2x - 3y + 4z &= 5\\ 3x + 4y - 2z &= 0\\ x + 7y - 6z &= -5 \end{aligned}$$

22. $$\begin{aligned} 3x - 13y &= 11\\ 7x + 19y &= 15 \end{aligned}$$

23. $$\begin{aligned} 23x + 12y &= 1\\ x + 13y &= 7 \end{aligned}$$

24. $$\begin{aligned} 15x + y &= -2\\ x + 9y &= -18 \end{aligned}$$

Soustava m rovnic o n neznámých

Dosud jsme řešili pouze soustavy dvou rovnic o dvou neznámých a tří rovnic o třech neznámých. V praxi potřebujeme často řešit také např. soustavy čtyř rovnic o šesti neznámých, sedmi rovnic o pěti neznámých, pěti rovnic o pěti neznámých apod., obecně m rovnic o n neznámých, přičemž m a n nemusí být stejná čísla.

Značení neznámých písmeny x, y, z, kterého jsme dosud používali, je při zapisování soustavy s mnoha neznámými nevýhodné. Abychom dosáhli přehlednějšího zápisu, budeme v případě soustavy s n neznámými používat k označení neznámých symbolů $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Je to přehlednější a podle indexu poslední neznámé poznáme okamžitě, kolik neznámých má soustava. Soustavu m lineárních rovnic o n neznámých pak zapíšeme ve tvaru

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1\\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2\\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n &= b_3\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned} \qquad (1)$$

kde koeficienty $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}, a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}, \ldots\ldots, a_{m1}, \ldots, a_{mn}$ a absolutní členy $b_1, b_2, \ldots, b_m$ jsou daná čísla.*) První index značí pořadí rovnice a druhý určuje pořadí neznámé, u které koeficient stojí. Index u b značí pořadí rovnice. Koeficient u j-té neznámé v i-té rovnici tedy zapíšeme a_{ij} a absolutní člen této rovnice je b_i. Tak např. v soustavě v příkladu 7 na str. 30 je $a_{11} = 2$, $a_{14} = 0$, $b_1 = 1$, $a_{32} = 2$, $a_{34} = -9$, $b_3 = -2$ atd. V této soustavě je $m = 3$ a $n = 4$, je to tedy soustava tří rovnic o čtyřech neznámých.

Jsou-li všechny absolutní členy soustavy rovny nule, nazývá se taková soustava **homogenní** (viz příklad 26 na str. 74). Soustava, v níž

*) Připomeňme znovu, že jsme se omezili pouze na čísla reálná a že v celé knize slovo číslo znamená číslo reálné.

aspoň jeden absolutní člen je nenulový, se nazývá **nehomogenní** (viz příklady na str. 32 a 76).

Řešením soustavy (1) budeme nazývat každou n-tici čísel takových, že při jejich dosazení za $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ do všech rovnic soustavy vzniknou rovnosti. Říkáme, že tato n-tice vyhovuje soustavě (1).

Koeficienty soustavy (1) často zapisujeme do schématu

$$\begin{Vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \ldots, & a_{mn} \end{Vmatrix},$$

které se nazývá **matice soustavy.** Doplníme-li toto schéma ještě o jeden sloupec, který je tvořen absolutními členy, vznikne tzv. **rozšířená matice soustavy**

$$\begin{Vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n}, & b_1 \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n}, & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \ldots, & a_{mn}, & b_m \end{Vmatrix}.$$

Pomocí této matice tedy můžeme zapsat soustavu, aniž musíme zapisovat neznámé $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Koeficienty a absolutní členy, z kterých je matice sestavena, budeme nazývat **prvky matice.** Prvky, které náleží jedné rovnici, tvoří tzv. **řádky,** prvky tvořené koeficienty z téže neznámé, popřípadě absolutními členy, tvoří **sloupce matice.** Prvky $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots$ tvoří tzv. **hlavní diagonálu matice.**

Ekvivalentní úpravy

Při řešení soustav dvou a tří rovnic o dvou a třech neznámých jsme rovnice upravovali tak, že po každé úpravě jsme dostali soustavu, jejíž řešení bylo stejné jako řešení soustavy původní. Takové dvě soustavy lineárních rovnic nazýváme **ekvivalentní soustavy** lineárních rovnic a úpravy, které převádějí jednu soustavu na soustavu s ní ekvivalentní, nazýváme **ekvivalentní úpravy.**

V soustavě lineárních rovnic můžeme

a) **zaměnit libovolně pořadí rovnic,**
b) **násobit obě strany kterékoli rovnice soustavy číslem $\alpha \neq 0$,**
c) **přičíst k oběma stranám některé rovnice odpovídající strany jiné rovnice soustavy**

a dostaneme vždy soustavu lineárních rovnic ekvivalentní se soustavou původní.

Metody řešení soustav lineárních rovnic, které v této kapitole probereme, jsou založeny na právě uvedených ekvivalentních úpravách rovnic.

Přímý a zpětný chod v Gaussově metodě

Gaussova eliminační metoda, která je jednou z nejužívanějších, je založena na stejném principu jako metoda dosazovací a sčítací. Řešení soustavy rovnic eliminační metodou si nejdříve ukážeme na následujícím příkladu.

Příklad 5. Ve fyzice budeme k výpočtu momentu setrvačnosti homogenní koule potřebovat vztah pro výpočet součtu $1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots$ $\ldots + (n-1)^4 + n^4$. Platí věta, že každý součet

$$(c + d)^k + (c + 2d)^k + (c + 3d)^k + \ldots + (c + nd)^k,$$

kde c, d jsou daná reálná čísla a k, n přirozená čísla, je dán mnohočlenem v proměnné n stupně $k + 1$ s nulovým absolutním členem (viz např. J. Vyšín, O nekonečných řadách, věta 1,1, kapitola 1,2), tj.

$$\sum_{i=1}^{n} (c + id)^k = a_1 n + a_2 n^2 + a_3 n^3 + \ldots + a_{k+1} n^{k+1},$$

kde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jsou jisté koeficienty. V našem případě je $c = 0$, $d = 1$, $k = 4$. Pro koeficienty $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$ dostaneme

$$nx_1 + n^2x_2 + n^3x_3 + n^4x_4 + nx^5 = 1^4 + 2^4 + \ldots + n^4.$$

Postupným dosazením prvních pěti hodnot proměnné n dostaneme rovnice

$$\begin{aligned} 1x_1 + 1^2x_2 + 1^3x_3 + 1^4x_4 + 1^5x_5 &= 1^4 \\ 2x_1 + 2^2x_2 + 2^3x_3 + 2^4x_4 + 2^5x_5 &= 1^4 + 2^4 \\ 3x_1 + 3^2x_2 + 3^3x_3 + 3^4x_4 + 3^5x_5 &= 1^4 + 2^4 + 3^4 \\ 4x_1 + 4^2x_2 + 4^3x_3 + 4^4x_4 + 4^5x_5 &= 1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 \\ 5x_1 + 5^2x_2 + 5^3x_3 + 5^4x_4 + 5^5x_5 &= 1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + 5^4. \end{aligned}$$

Po provedení příslušných výpočtů dostáváme soustavu pěti rovnic o pěti neznámých.

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 1 \\
2x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 16x_4 + 32x_5 &= 17 \\
3x_1 + 9x_2 + 27x_3 + 81x_4 + 243x_5 &= 98 \\
4x_1 + 16x_2 + 64x_3 + 256x_4 + 1\,024x_5 &= 354 \\
5x_1 + 25x_2 + 125x_3 + 625x_4 + 3\,125x_5 &= 979
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

Matice této soustavy je

$$
\begin{Vmatrix}
1, & 1, & 1, & 1, & 1 \\
2, & 4, & 8, & 16, & 32 \\
3, & 9, & 27, & 81, & 243 \\
4, & 16, & 64, & 256, & 1\,024 \\
5, & 25, & 125, & 625, & 3\,125
\end{Vmatrix}
$$

a rozšířená matice soustavy je

$$
\begin{Vmatrix}
1, & 1, & 1, & 1, & 1, & 1 \\
2, & 4, & 8, & 16, & 32, & 17 \\
3, & 9, & 27, & 81, & 243, & 98 \\
4, & 16, & 64, & 256, & 1\,024, & 354 \\
5, & 25, & 125, & 625, & 3\,125, & 979
\end{Vmatrix}.
$$

Soustavu budeme řešit takto:

nejdříve obě strany první rovnice vynásobíme postupně čísly -2, -3, -4, -5 a po řadě přičteme k odpovídajícím stranám druhé až páté rovnice (ekv. úpr. b) c) na str. 25). Dostaneme ekvivalentní soustavu, v které ve všech rovnicích kromě první chybí člen s x_1.

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 1 \\
2x_2 + 6x_3 + 14x_4 + 30x_5 &= 15 \\
6x_2 + 24x_3 + 78x_4 + 240x_5 &= 95 \\
12x_2 + 60x_3 + 252x_4 + 1\,020x_5 &= 350 \\
20x_2 + 120x_3 + 620x_4 + 3\,120x_5 &= 974
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

Další úprava bude spočívat v tom, že obě strany druhé rovnice postupně vynásobíme čísly -3, -6, -10 a přičteme k odpovídajícím stranám třetí až páté rovnice. Dostaneme opět ekvivalentní soustavu, jejíž poslední tři rovnice nebudou mít členy s x_1 a x_2.

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 1 \\
2x_2 + 6x_3 + 14x_4 + 30x_5 &= 15 \\
6x_3 + 36x_4 + 150x_5 &= 50 \\
24x_3 + 168x_4 + 840x_5 &= 260 \\
60x_3 + 480x_4 + 2\,820x_5 &= 824
\end{aligned}
\qquad (3)
$$

Nyní vynásobíme obě strany třetí rovnice postupně čísly -4, -10 a přičteme (postupně) k příslušným stranám čtvrté a páté rovnice, z nichž tímto způsobem vyloučíme členy s x_3.

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 1 \\
2x_2 + 6x_3 + 14x_4 + 30x_5 &= 15 \\
6x_3 + 36x_4 + 150x_5 &= 50 \\
24x_4 + 240x_5 &= 60 \\
120x_4 + 1\,320x_5 &= 324
\end{aligned}
\qquad (4)
$$

Nakonec násobíme obě strany čtvrté rovnice číslem -5 a z páté rovnice vyloučíme člen s neznámou x_4. Obě strany třetí až páté rovnice pak vydělíme společnými děliteli a dostaneme ekvivalentní soustavu se soustavou původní.

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 1 \\
2x_2 + 6x_3 + 14x_4 + 30x_5 &= 15 \\
3x_3 + 18x_4 + 75x_5 &= 25 \\
2x_4 + 20x_5 &= 5 \\
5x_5 &= 1
\end{aligned}
\qquad (5)
$$

Matice této soustavy

$$
\begin{Vmatrix}
1, & 1, & 1, & 1, & 1 \\
0, & 2, & 6, & 14, & 30 \\
0, & 0, & 3, & 18, & 75 \\
0, & 0, & 0, & 2, & 20 \\
0, & 0, & 0, & 0, & 5
\end{Vmatrix}
$$

má všechny diagonální prvky nenulové a pod hlavní diagonálou má samé nuly. Taková matice se nazývá trojúhelníková.

Soustavu s trojúhelníkovou maticí pak vyřešíme tak, že z poslední rovnice vypočítáme $x_5 = \frac{1}{5}$, dosadíme do čtvrté rovnice a vypočítáme $x_4 = \frac{1}{2}$, dosadíme za x_4 a x_5 do třetí rovnice a vypočítáme $x_3 = \frac{1}{3}$, potom za x_3, x_4, x_5 dosadíme do druhé rovnice a vypočítáme $x_2 = 0$ a nakonec dosadíme za x_2, x_3, x_4, x_5 do první rovnice a vypočítáme $x_1 = -\frac{1}{30}$.

Řešení této soustavy tedy je

$$x_1 = -\frac{1}{30}, \; x_2 = 0, \; x_3 = \frac{1}{3}, \; x_4 = \frac{1}{2}, \; x_5 = \frac{1}{5}.$$

Zkoušku si proveďte sami dosazením do původní soustavy.

Dosadíme-li tedy do výrazu

$$\sum_{i=1}^{n} i^4 = nx_1 + n^2x_2 + n^3x_3 + n^4x_4 + n^5x_5,$$

dostaneme vzorec pro výpočet součtu čtvrtých mocnin přirozených čísel (mocniny budeme psát sestupně).

$$\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30} = \frac{n(6n^4 + 15n^3 + 10n^2 - 1)}{30}$$

Ve sbírkách vzorců najdete obvykle tento mnohočlen rozložený

$$\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}.$$

O správnosti rozkladu se můžete přesvědčit roznásobením.

Na příkladu 5 jsme si ukázali, že **řešení soustav pomocí Gaussovy eliminační metody se skládá ze dvou částí, tzv. chodů:**

1. **přímý chod** spočíval v převedení soustavy na soustavu s **trojúhelníkovou maticí** pomocí ekvivalentních úprav. V prvním kroku přímého chodu jsme vyloučili pomocí první rovnice neznámou x_1 z druhé až páté rovnice, a tím jsme převedli soustavu (1) na soustavu (2). V druhém kroku jsme převedli soustavu (2) na soustavu (3) tak, že jsme pomocí druhé rovnice soustavy (2) vyloučili neznámou x_2 z třetí až páté rovnice. Ve třetím kroku jsme pomocí třetí rovnice soustavy (3) vyloučili neznámou x_3 ze čtvrté a páté rovnice, a tím vznikla soustava (4). V posledním kroku jsme pomocí čtvrté rovnice soustavy (4) vyloučili neznámou x_4 z páté rovnice, a tím vznikla soustava (5) s trojúhelníkovou maticí.

2. **Zpětný chod** spočíval v postupném dosazování z poslední rovnice soustavy s trojúhelníkovou maticí do rovnic předcházejících. Tím jsme nalezli řešení soustavy.

Příklad 6. Gaussovou eliminační metodou řešte soustavu;

$$\begin{aligned}
2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 &= -3\\
x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 &= -2\\
3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 + 2x_5 &= 1\\
-x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 7x_4 - 2x_5 &= -2\\
-2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 5x_4 - 4x_5 &= 6
\end{aligned}$$

Řešení budeme zapisovat do tabulky I. Do prvních pěti sloupců zapíšeme koeficienty u neznámých a do šestého absolutní členy; v prvních šesti sloupcích jsou tedy prvky rozšířené matice soustavy. V sedmém sloupci je označení rovnice číslem v hranaté závorce a předpis, jakou ekvivalentní úpravou tato rovnice vznikla. Např. vztah [3'] ~ [3] . 2 — [1]. 3 znamená, že rovnice [3'] vznikla tak, že jsme obě strany rovnice [1] vynásobili třemi a odečetli od dvojnásobků příslušných stran rovnice [3].

Výhodou tabulky je, že při řešení nemusíme stále opisovat neznámé, a že celý postup řešení je přehledně zapsán v posledním sloupci a kterýkoli krok můžeme snadno zopakovat, hledáme-li chybu v řešení.

Tabulka I

Koeficienty u neznámých					Abs. člen	Označení rovnice a ekvivalentní úpravy
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
2	−1	3	1	1	−3	[1]
1	2	3	1	1	−2	[2]
3	−1	−2	1	2	1	[3]
−1	−2	4	−7	−2	−2	[4]
−2	4	6	5	−4	6	[5]
	5	3	1	1	−1	[2'] ~ [2] . 2 — [1]
	1	−13	−1	1	11	[3'] ~ [3] . 2 — [1] . 3
	−5	11	−13	−3	−7	[4'] ~ [4] . 2 + [1]
	3	9	6	−3	3	[5'] ~ [5] + [1]
		−68	−6	4	56	[3''] ~ [3'] . 5 — [2']
		14	−12	−2	−8	[4''] ~ [4'] + [2']
		12	9	−6	6	[5''] ~ [5'] . $\frac{5}{3}$ — [2']
			−225	−20	60	[4'''] ~ [4''] . 17 + [3''] . $\frac{7}{2}$
			90	−60	180	[5'''] ~ [5''] . $\frac{34}{3}$ + [3''] . 2
				−34	102	[5^{IV}] ~ [5'''] . $\frac{1}{2}$ + [4'''] . $\frac{1}{5}$

Rovnice [1], [2′], [3″], [4‴], [5$^{\mathrm{IV}}$] tvoří ekvivalentní soustavu

$$\begin{aligned}
2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 &= -3\\
5x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 &= -1\\
-68x_3 - 6x_4 + 4x_5 &= 56\\
-225x_4 - 20x_5 &= 60\\
-34x_5 &= 102
\end{aligned}$$

s trojúhelníkovou maticí

$$\left\|\begin{matrix}
2, & -1, & 3, & 1, & 1\\
0, & 5, & 3, & 1, & 1\\
0, & 0, & -68, & -6, & 4\\
0, & 0, & 0, & -225, & -20\\
0, & 0, & 0, & 0, & -34
\end{matrix}\right\|.$$

Tím jsme provedli **přímý chod.** Nyní provedeme **zpětný chod.** Z rovnice [5$^{\mathrm{IV}}$] dosadíme za x_5 do [4‴] a vypočítáme x_4. Za x_5 a x_4 dosadíme do [3″] a vypočítáme x_3. Za x_3, x_4, x_5 dosadíme do [2′] a vypočítáme x_2 a nakonec do rovnice [1] dosadíme za x_2, x_3, x_4, x_5 a vypočítáme x_1. Řešení soustavy je

$$x_1 = 2,\ x_2 = 1,\ x_3 = -1,\ x_4 = 0,\ x_5 = -3.$$

Zkoušku proveďte dosazením do původní soustavy, nikoli do soustavy s trojúhelníkovou maticí, neboť je možné, že jsme v ekvivalentních úpravách udělali chybu.

Příklad 7. Gaussovou eliminační metodou řešte soustavu

$$\begin{aligned}
2x_1 - 3x_2 + x_3 \phantom{{}+5x_4} &= 3\\
4x_1 - x_2 - 3x_3 + 5x_4 &= 1\\
-2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 9x_4 &= -2.
\end{aligned}$$

Ekvivalentní úpravy budeme zapisovat pomocí rozšířené matice soustavy. Znaménko $\sim$ mezi maticemi vyjadřuje, že obě matice náleží ekvivalentním soustavám.

$$\left\|\begin{matrix}
2, & -3, & 1, & 0, & 3\\
4, & -1, & -3, & 5, & 1\\
-2, & 2, & 4, & -9, & -2
\end{matrix}\right\| \sim
\left\|\begin{matrix}
2, & -3, & 1, & 0, & 3\\
0, & 5, & -5, & 5, & -5\\
0, & -1, & 5, & -9, & 1
\end{matrix}\right\| \sim$$

$$\sim \left\|\begin{matrix}
2, & -3, & 1, & 0, & 3\\
0, & 1, & -1, & 1, & -1\\
0, & 0, & 1, & -2, & 0
\end{matrix}\right\|$$

Výsledná trojúhelníková matice je rozšířenou maticí soustavy

$$\begin{aligned}
2x_1 - 3x_2 + x_3 \phantom{{}+x_4} &= 3\\
x_2 - x_3 + x_4 &= -1\\
x_3 - 2x_4 &= 0.
\end{aligned}$$

Poslední rovnice má nekonečně mnoho řešení. Jestliže jedno číslo z dvojice x_3, x_4 libovolně zvolíme, je tím druhé určeno. Zvolme např. $x_4 = \alpha$, kde α je určité číslo. Po provedení zpětného chodu dostaneme

$$x_1 = \frac{\alpha}{2},\ x_2 = \alpha - 1,\ x_3 = 2\alpha,\ x_4 = \alpha.$$

Například pro $\alpha = -8$ je $x_1 = -4$, $x_2 = -9$, $x_3 = -16$, $x_4 = -8$.

Příklad 8. Řešte soustavu, jejíž rozšířená matice je

$$\left\|\begin{matrix}
2, & -3, & 0, & -1, & 5\\
2, & 1, & 1, & 0, & -2\\
0, & 3, & 1, & -1, & 3\\
4, & 1, & 2, & -2, & 4
\end{matrix}\right\|.$$

Ekvivalentní úpravy budeme opět zapisovat pomocí matic:

$$\left\|\begin{matrix}
2, & -3, & 0, & -1, & 5\\
2, & 1, & 1, & 0, & -2\\
0, & 3, & 1, & -1, & 3\\
4, & 1, & 2, & -2, & 4
\end{matrix}\right\| \sim
\left\|\begin{matrix}
2, & -3, & 0, & -1, & 5\\
0, & 4, & 1, & 1, & -7\\
0, & 3, & 1, & -1, & 3\\
0, & 7, & 2, & 0, & -6
\end{matrix}\right\| \sim$$

$$\sim \left\|\begin{matrix}
2, & -3, & 0, & -1, & 5\\
0, & 4, & 1, & 1, & -7\\
0, & 0, & 1, & -7, & 33\\
0, & 0, & 1, & -7, & 25
\end{matrix}\right\| \sim
\left\|\begin{matrix}
2, & -3, & 0, & -1, & 5\\
0, & 4, & 1, & 1, & -7\\
0, & 0, & 1, & -7, & 33\\
0, & 0, & 0, & 0, & 8
\end{matrix}\right\|$$

Poslední matice je rozšířenou maticí soustavy

$$\begin{aligned}
2x_1 - 3x_2 \phantom{{}+x_3} - x_4 &= 5\\
4x_2 + x_3 + x_4 &= -7\\
x_3 - 7x_4 &= 33\\
0 \,.\, x_4 &= 8.
\end{aligned}$$

Protože poslední rovnice této soustavy nemá řešení, nemá daná soustava řešení.

Z příkladů 7 a 8 vidíme, že pomocí Gaussovy metody lze zjistit, má-li soustava řešení, a je také možno vyřešit soustavu, která má nekonečně mnoho řešení. Podrobně se řešitelností soustav budeme zabývat ještě později.

CVIČENÍ

25. Odvoďte vzorec pro výpočet:

a) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 =$
b) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 =$
c) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 =$
d) $1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n-1)^3 =$
e) $1^4 + 3^4 + 5^4 + \ldots + (2n-1) =$

26. Gaussovou eliminační metodou řešte soustavy rovnic:

a)
$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 &= 0 \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 &= 1 \\ 7x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 &= 2 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 - 4x_4 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 4 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 &= 7 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 &= 5 \\ x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 2 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} 3x_1 - 4x_2 + x_3 - 7x_4 &= 2 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= -2 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 &= 3 \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 - 2x_4 &= 1 \end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned} 5x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 - x_5 &= 18 \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 + x_5 &= -2 \\ 4x_2 - x_3 + x_4 - 3x_5 &= 2 \\ -2x_1 - 5x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 2x_5 &= -1 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 - 4x_5 &= 11 \end{aligned}$$

f)
$$\begin{aligned} 7x_1 - 8x_2 - 4x_4 + 5x_5 &= 28 \\ x_2 - 3x_3 + x_4 &= -7 \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 - x_5 &= 35 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + 3x_5 &= -5 \\ 8x_1 + 7x_3 - 6x_4 &= 31 \end{aligned}$$

27. Gaussovou eliminační metodou vyřešte všechny příklady z předchozího cvičení.

C. NĚKTERÉ MODIFIKACE GAUSSOVY ELIMINAČNÍ METODY

Schéma jediného dělení

Dosud jsme řešili soustavy, jejichž koeficienty byla celá čísla a řešení byla čísla racionální. Na příkladech jsme si ukázali princip Gaussovy metody, tj. převedení soustavy na soustavu s trojúhelníkovou maticí.

Modifikace Gaussovy metody, kterou nyní ukážeme, je výhodná k řešení rovnic s víceciferními koeficienty pomocí samočinného počítače, kalkulačního stroje, nebo logaritmického pravítka. Podstatou je opět převedení soustavy na soustavu s trojúhelníkovou maticí ekvivalentními úpravami. Postup si ukážeme na řešení obecné soustavy pěti rovnic o pěti neznámých. Pravé strany původní soustavy budeme značit v tomto případě $p_1, p_2, \ldots, p_5$.

$$\begin{aligned} &[1] \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5 = p_1 \\ &[2] \quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + a_{25}x_5 = p_2 \\ &[3] \quad a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + a_{35}x_5 = p_3 \\ &[4] \quad a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 + a_{45}x_5 = p_4 \\ &[5] \quad a_{51}x_1 + a_{52}x_2 + a_{53}x_3 + a_{54}x_4 + a_{55}x_5 = p_5 \end{aligned} \qquad (1)$$

Soustava musí být uspořádaná tak, aby $a_{11} \neq 0$. Obě strany rovnice [1] budeme dělit koeficientem a_{11}, který budeme nazývat **vedoucím prvkem** v prvním kroku. Rovnici [1] tím převedeme na rovnici [1′], v níž koeficient u x_1 bude $b_{11} = 1$. Z rovnic [2] až [5] vyloučíme neznámou x_1 tak, že postupně obě strany první rovnice vynásobíme čísly $-a_{21}$, $-a_{31}, \ldots, -a_{51}$ a po řadě přičteme k příslušným stranám těchto rovnic. Dostaneme ekvivalentní soustavu:

$$\begin{aligned} &[1'] \quad x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + b_{14}x_4 + b_{15}x_5 = q_1 \\ &[2'] \quad b_{22}x_2 + b_{23}x_3 + b_{24}x_4 + b_{25}x_5 = q_2 \\ &[3'] \quad b_{32}x_2 + b_{33}x_3 + b_{34}x_4 + b_{35}x_5 = q_3 \\ &[4'] \quad b_{42}x_2 + b_{43}x_3 + b_{44}x_4 + b_{45}x_5 = q_4 \\ &[5'] \quad b_{52}x_2 + b_{53}x_3 + b_{54}x_4 + b_{55}x_5 = q_5 \end{aligned} \qquad (2)$$

Koeficienty a absolutní členy soustavy (2) můžeme vyjádřit:

$$\begin{aligned} &b_{11} = \frac{a_{11}}{a_{11}} = 1,\ b_{12} = \frac{a_{12}}{a_{11}}, \ldots \\ &b_{21} = a_{21} - a_{21} = 0,\ b_{22} = a_{22} - a_{21}b_{12}, \ldots \\ &b_{31} = a_{31} - a_{31} = 0,\ b_{32} = a_{32} - a_{31}b_{12}, \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

čili

$$b_{1j} = \frac{a_{1j}}{a_{11}},\ j = 2, 3, 4, 5;\ q_1 = \frac{p_1}{a_{11}}$$

$$b_{ij} = a_{ij} - a_{i1}b_{1j},\ q_i = p_i - a_{i1}q_1, \qquad i, j = 2, 3, 4, 5$$

Úpravu každé rovnice můžeme symbolicky zapsat

$$[1'] \sim [1] \cdot \frac{1}{a_{11}},$$

$$[i'] \sim [i] - a_{i1}[1'], \quad \text{kde} \quad i = 2, 3, 4, 5.$$

Značka ∞ opět vyjadřuje, že rovnice $[i']$ vznikla z rovnice $[i]$ naznačenou ekvivalentní úpravou.

Za předpokladu, že je $b_{22} \neq 0$, vydělíme obě strany rovnice $[2']$ koeficientem b_{22}, který budeme nyní nazývat vedoucím prvkem ve druhém kroku. Vznikne rovnice $[2'']$, jejíž pomocí vyloučíme z rovnic $[3'], \ldots, [5']$ neznámou x_2. Rovnici $[1']$ již upravovat nebudeme. Dostaneme soustavu:

$$\begin{array}{ll} [1'] & x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + b_{14}x_4 + b_{15}x_5 = q_1 \\ [2''] & x_2 + c_{23}x_3 + c_{24}x_4 + c_{25}x_5 = r_2 \\ [3''] & c_{33}x_3 + c_{34}x_4 + c_{35}x_5 = r_3 \\ [4''] & c_{43}x_3 + c_{44}x_4 + c_{45}x_5 = r_4 \\ [5''] & c_{53}x_3 + c_{54}x_4 + c_{55}x_5 = r_5 \end{array} \qquad (3)$$

Koeficienty a absolutní členy soustavy (3) můžeme vyjádřit ve tvaru

$$c_{2j} = \frac{b_{2j}}{b_{22}}, \; j = 3, 4, 5; \; r_2 = \frac{a_1}{b_{22}},$$

$$c_{ij} = b_{ij} - b_{i2} \cdot c_{2j}, \; r_i = q_i - b_{i2}r_2; \; i, j = 3, 4, 5.$$

Symbolicky opět tuto úpravu můžeme napsat ve tvaru

$$[2''] \sim [2'] \frac{1}{b_{22}},$$

$$[i''] \sim [i'] - b_{i2}[2''], \quad \text{kde} \quad i = 3, 4, 5.$$

Dále převedeme soustavu na tvar:

$$\begin{array}{ll} [1'] & x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + b_{14}x_4 + b_{15}x_5 = q_1 \\ [2''] & x_2 + c_{23}x_3 + c_{24}x_4 + c_{25}x_5 = r_2 \\ [3'''] & x_3 + d_{34}x_4 + d_{35}x_5 = s_3 \\ [4'''] & d_{44}x_4 + d_{45}x_5 = s_4 \\ [5'''] & d_{54}x_4 + d_{55}x_5 = s_5 \end{array} \qquad (4)$$

úpravou

$$d_{3j} = \frac{c_{3j}}{c_{33}}, \; j = 4; 5; \; s_3 = \frac{r_3}{c_{33}},$$

$$d_{ij} = c_{ij} - c_{i3}d_{3j}, \, s_i = r_i - c_{i3}s_3; \, i, j = 4; 5,$$

neboli

$$[3'''] \sim [3''] \frac{1}{c_{33}},$$

$$[i'''] \sim [i''] - c_{i3}[3'''], \qquad \text{kde } i = 4; 5.$$

Nyní provedeme úpravu

$$[4^{IV}] \sim [4'''] \frac{1}{d_{44}}$$

$$[5^{IV}] \sim [5'''] - d_{53}[4^{IV}]$$

a dostaneme soustavu, jejíž poslední rovnice má tvar $e_{55}x_5 = t_5$. Obě strany této rovnice vydělíme koeficientem e_{55}. Výsledná soustava

$$\begin{array}{ll} [1'] & x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + b_{14}x_4 + b_{15}x_5 = q_1 \\ [2''] & x_2 + c_{23}x_3 + c_{24}x_4 + c_{25}x_5 = r_2 \\ [3'''] & x_3 + d_{34}x_4 + d_{35}x_5 = s_3 \\ [4^{IV}] & x_4 + e_{45}x_5 = t_4 \\ [5^{V}] & x_5 = u_5 \end{array}$$

má **trojúhelníkovou matici**

$$\left\| \begin{array}{lllll} 1, & b_{12}, & b_{13}, & b_{14}, & b_{15} \\ 0, & 1, & c_{23}, & c_{24}, & c_{25} \\ 0, & 0, & 1, & d_{34}, & d_{35} \\ 0, & 0, & 0, & 1, & e_{45} \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 1 \end{array} \right\|.$$

Tím jsme provedli celý **přímý chod.**

Při větším počtu rovnic a neznámých bychom postupovali analogicky dále. Výhodou této modifikace Gaussovy metody je, že diagonální prvky, tj. koeficienty $b_{11}, c_{22}, d_{33}, e_{44}, f_{55}$, jsou vesměs rovny jedné, takže ve zpětném chodu odpadne dělení. Zpětný chod provedeme opět tak, že budeme postupně dosazovat za x_5 z páté rovnice do čtvrté, potom za x_4 a x_5 do třetí, dále za x_3, x_4 a x_5 do druhé a nakonec dosazením do prvé rovnice vypočítáme poslední neznámou. Schéma jediného dělení, které jsme právě vyložili, lze zapsat do tabulky II. Výpočet se tím stane přehledný a značně se omezí možnost numerické chyby. Během řešení neustále pomocí kontrolních součtů kontrolujeme správnost výpočtů.

Příklady, které budete řešit pomocí schématu jediného dělení, řešte při praxi v strojně početní stanici (dále jen SPS) na kalkulačních strojích.

Tabulka je uspořádána takto: V prvních pěti sloupcích jsou postupně zapisovány koeficienty soustav (1), (2), ..., (5) a v šestém sloupci jsou jejich absolutní členy. V prvních šesti sloupcích jsou tedy opět prvky rozšířené matice soustavy. V sedmém sloupci, označeném σ, jsou tzv. **kontrolní součty;** jsou to součty čísel z téhož řádku v prvních šesti sloupcích, tj. součty koeficientů a absolutního členu téže rovnice. V devátém, posledním sloupci jsou řádky označeny tak, jak jsme na předcházejících stránkách značili rovnice; zároveň je naznačeno, jak příslušný řádek vznikl. Např. $[2'] \sim [2] - a_{21}[1']$ znamená, že čísla řádku $[2']$ vznikla takto: K číslům $a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}, a_{25}$ z prvních sedmi sloupců v řádku [2] jsme po řadě přičetli prvních sedm čísel řádku $[1']$ znásobených číslem $-a_{21}$. Tak jsme dostali čísla $b_{22}, b_{23}, b_{24}, b_{25}, q_2$ a z čísla σ_2 číslo Σ_2', které zapíšeme do osmého sloupce řádku $[2']$. Toto číslo Σ_2' **musí být rovno kontrolnímu součtu** σ_2', neboť

$$\Sigma_2' = \sigma_2 - a_{21}\sigma_1' = a_{21} + a_{22} + a_{23} + a_{24} + a_{25} + p_2 - a_{21}(1 + b_{12} + b_{13} + b_{14} + b_{15} + q_1) = (a_{21} - a_{21}) + (a_{22} - a_{21}b_{12}) + (a_{23} - a_{21}b_{13}) + (a_{24} - a_{21}b_{14}) + (a_{25} - a_{21}b_{15}) + (p_2 - a_{21}q_1) = 0 + b_{22} + b_{23} + b_{24} + b_{25} + q_2 = \sigma_2',$$

tedy skutečně

$$\Sigma_2' = \sigma_2'.$$

Podobně bychom provedli důkaz pro všechny ostatní řádky. **Zjistíme-li, že se po některém kroku čísla 7. a 8. sloupce sobě nerovnají, udělali jsme chybu ve výpočtu, a musíme jej opakovat.** Tím neustále kontrolujeme správnost numerických výpočtů.

Příklad 9. Pomocí schématu jediného dělení řešte soustavu:

$$\begin{aligned}
5{,}14x_1 - 0{,}34x_2 + 0{,}13x_3 - 0{,}43x_4 &= 0{,}11\\
4{,}43x_1 + 2{,}43x_2 - 0{,}18x_3 - 2{,}36x_4 &= -0{,}46\\
0{,}22x_1 + 2{,}22x_2 + 0{,}93x_3 - 2{,}25x_4 &= 0{,}28\\
-4{,}47x_1 + 0{,}63x_2 + 0{,}95x_3 - 0{,}28x_4 &= 0{,}98
\end{aligned}$$

Řešení budeme zapisovat do tabulky III.

Rozšířená trojúhelníková matice výsledné soustavy je

$$\left\|\begin{array}{lllll}
1; & -0{,}066\,15; & 0{,}025\,29; & -0{,}083\,66; & 0{,}021\,40\\
0; & 1\ ; & -0{,}107\,24; & -0{,}730\,58; & -0{,}203\,74\\
0; & 0\ ; & 1\ ; & -0{,}514\,63; & 0{,}627\,59\\
0; & 0\ ; & 0\ ; & 1\ ; & 2{,}914\,51
\end{array}\right\|.$$

Tabulka II

Koeficienty u neznámých					Abs. člen	Kontrol. součty σ	Kontrol. čísla Σ	Označení řádku (rovnice) a ekvivalentní úpravy
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5				
a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	p_1	σ_1		[1]
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	p_2	σ_2		[2]
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}	p_3	σ_3		[3]
a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}	p_4	σ_4		[4]
a_{51}	a_{52}	a_{53}	a_{54}	a_{55}	p_5	σ_5		[5]
1	b_{12}	b_{13}	b_{14}	b_{15}	q_1	σ_1'	Σ_1'	$[1'] \sim [1]\dfrac{1}{a_{11}}$
	b_{22}	b_{23}	b_{24}	b_{25}	q_2	σ_2'	Σ_2'	$[2'] \sim [2] - a_{21}[1']$
	b_{32}	b_{33}	b_{34}	b_{35}	q_3	σ_3'	Σ_3'	$[3'] \sim [3] - a_{31}[1']$
	b_{42}	b_{43}	b_{44}	b_{45}	q_4	σ_4'	Σ_4'	$[4'] \sim [4] - a_{41}[1']$
	b_{52}	b_{53}	b_{54}	b_{55}	q_5	σ_5'	Σ_5'	$[5'] \sim [5] - a_{51}[1']$
	1	c_{23}	c_{24}	c_{25}	r_2	σ_2''	Σ_2''	$[2''] \sim [2']\dfrac{1}{b_{22}}$
		c_{33}	c_{34}	c_{35}	r_3	σ_3''	Σ_3''	$[3''] \sim [3'] - b_{32}[2'']$
		c_{43}	c_{44}	c_{45}	r_4	σ_4''	Σ_4''	$[4''] \sim [4'] - b_{42}[2'']$
		c_{53}	c_{54}	c_{55}	r_5	σ_5''	Σ_5''	$[5''] \sim [5'] - b_{52}[2'']$
		1	d_{34}	d_{35}	s_3	σ_3'''	Σ_3'''	$[3'''] \sim [3'']\dfrac{1}{c_{33}}$
			d_{44}	d_{45}	s_4	σ_4'''	Σ_4'''	$[4'''] \sim [4''] - c_{43}[3''']$
			d_{54}	d_{55}	s_5	σ_5'''	Σ_5'''	$[5'''] \sim [5''] - c_{53}[3''']$
			1	e_{45}	t_4	σ_4^{IV}	Σ_4^{IV}	$[4^{IV}] \sim [4''']\dfrac{1}{d_{44}}$
				e_{55}	t_5	σ_5^{IV}	Σ_5^{IV}	$[5^{IV}] \sim [5'''] - d_{54}[4^{IV}]$
				1	u_5	σ_5^{V}	Σ_5^{V}	$[5^{V}] \sim [5^{IV}]\dfrac{1}{e_{55}}$

Tabulka III

Koeficienty u neznámých x_1	x_2	x_3	x_4	Absolutní člen	σ	Σ	Označení řádku (rovnice) a ekvivalentní úpravy
5,14	−0,34	0,13	−0,43	0,11	4,61		[1]
4,43	2,43	−0,18	−2,36	−0,46	3,86		[2]
0,22	2,22	0,93	−2,25	0,28	1,40		[3]
−4,47	0,63	0,95	−0,28	0,98	−2,19		[4]
1	−0,06615	0,02529	−0,08366	0,02140	0,89688	0,89689	$[1'] \sim [1]\,\frac{1}{5,14}$
	2,72304	−0,29203	−1,98939	−0,55480	−0,11318	−0,11318	$[2'] \sim [2] - 4,43\,[1']$
	2,23455	0,92444	−2,23159	0,27529	1,20269	1,20269	$[3'] \sim [3] - 0,22\,[1']$
	0,33431	1,06305	−0,65396	1,07566	1,81905	1,81905	$[4'] \sim [4] + 4,47\,[1']$
	1	−0,10724	−0,73058	−0,20374	−0,04156	−0,04156	$[2''] \sim [2']\,\frac{1}{2,72304}$
		1,16407	−0,59907	0,73056	1,29556	1,29556	$[3''] \sim [3'] - 2,23455\,[2'']$
		1,09890	−0,40972	1,14377	1,83295	1,83294	$[4''] \sim [4'] - 0,33431\,[2'']$
		1	−0,51463	0,62759	1,11296	1,11296	$[3'''] \sim [3'']\,\frac{1}{1,16407}$
			0,15581	0,45411	0,60992	0,60992	$[4'''] \sim [4''] - 1,09890\,[3''']$
			1	2,91451	3,91451	3,91451	$[4''''] \sim [4''']\,\frac{1}{0,15581}$

Po provedení zpětného chodu dostaneme řešení:

$x_1 = 0,353\,90;\quad x_2 = 2,153\,69;\quad x_3 = 2,127\,48;\quad x_4 = 2,914\,51.$

Zkouška:

$$L_1 = 1,819\,05 - 0,732\,25 + 0,276\,57 - 1,253\,24 = 0,110\,13,\ P_1 = 0,11$$
$$L_1 = P_1 + 0,000\,13,\ |L_1 - P_1| = 0,118\ \%\ |P_1|;$$
$$L_2 = 1,567\,78 + 5,233\,47 - 0,382\,95 - 6,878\,24 = -0,459\,94,$$
$$P_2 = -0,46;$$
$$L_2 = P_2 + 0,000\,06,\ |L_2 - P_2| = 0,013\ \%\ |P_2|,$$
$$L_3 = 0,077\,86 + 4,781\,19 + 1,978\,56 - 6,557\,65 = 0,279\,96,\ P_3 = 0,28;$$
$$L_3 = P_3 - 0,000\,04,\ |L_3 - P_3| = 0,014\,3\ \%\ |P_3|,$$
$$L_4 = -1,581\,93 + 1,356\,82 + 2,021\,11 - 0,816\,06 = 0,979\,94,$$
$$P_4 = 0,98;$$
$$L_4 = P_4 - 0,000\,06,\ |L_4 - P_4| = 0,006\,1\ \%\ |P_4|.$$

Vidíme, že nalezené hodnoty neznámých nevyhovují definici řešení soustavy rovnic. Vlivem zaokrouhlování během výpočtů objevily se pak při zkoušce mezi levými a pravými stranami určité rozdíly, které budeme nazývat rezidua. V těchto případech budeme za řešení soustavy považovat ty n-tice čísel, pro které nebudou absolutní hodnoty reziduí větší než jistá, předem stanovená hodnota. Hovoříme pak o přibližném řešení soustavy. V příkladu 9 má největší absolutní hodnotu reziduum $L_1 - P_1$, a to $|L_1 - P_1| = 0,118\ \%\ |P_1|$. Kdybychom požadovali větší přesnost, tj. menší rezidua, museli bychom zřejmě při řešení počítat s větším počtem číslic.

Příklad 10. Pomocí schématu jediného dělení řešte soustavu:

$$\begin{aligned} x_1 + 0,42x_2 + 0,54x_3 + 0,66x_4 &= 0,3 \\ 0,42x_1 + x_2 + 0,32x_3 + 0,44x_4 &= 0,5 \\ 0,54x_1 + 0,32x_2 + x_3 + 0,22x_4 &= 0,7 \\ 0,66x_1 + 0,44x_2 + 0,22x_3 + x_4 &= 0,9 \end{aligned}$$

Než začneme řešit, všimneme si matice této soustavy:

$$\left\| \begin{matrix} 1\ ; & 0,42; & 0,54; & 0,66 \\ 0,42; & 1\ ; & 0,32; & 0,44 \\ 0,54; & 0,32; & 1\ ; & 0,22 \\ 0,66; & 0,44; & 0,22; & 1 \end{matrix} \right\|$$

Tabulka IV

Koeficienty u neznámých x_1	x_2	x_3	x_4	Absolutní člen	σ	Σ	Označení řádku (rovnice) a ekvivalentní úpravy
1	0,42	0,54	0,66	0,3	2,92		[1]
...	1,00	0,32	0,44	0,5	2,68		[2]
...	...	1,00	0,22	0,7	2,78		[3]
...	...	...	1,00	0,9	3,22		[4]
1	0,42	0,54	0,66	0,3	2,92	2,92	[1'] ~ [1]
	0,82360	0,09320	0,16280	0,37400	1,45360	1,45360	[2'] ~ [2] — 0,42 [1']
	...	0,70840	—0,13640	0,53800	1,20320	1,20320	[3'] ~ [3] — 0,54 [1']
	...	...	0,56440	0,70200	1,29280	1,29280	[4'] ~ [4] — 0,66 [1']
	1	0,11316	0,19767	0,45410	1,76493	1,76493	[2''] ~ [2'] $\frac{1}{0,82360}$
		0,69785	—0,15482	0,49568	1,03871	1,03871	[3''] ~ [3'] — 0,09320 [2'']
		...	0,53222	0,62807	1,00547	1,00547	[4''] ~ [4'] — 0,16280 [2'']
		1	—0,22185	0,71030	1,48845	1,48844	[3'''] ~ [3''] $\frac{1}{0,69785}$
			0,49787	0,73804	1,23591	1,23591	[4'''] ~ [4''] + 0,15482 [3''']
			1	1,48240	2,48240	2,48240	[4''''] ~ [4'''] $\frac{1}{0,49787}$

V této matici je $a_{12} = a_{21} = 0{,}42$; $a_{13} = a_{31} = 0{,}54$; $a_{14} = a_{41} = 0{,}66$; $a_{23} = a_{32} = 0{,}32$; $a_{24} = a_{42} = 0{,}44$; $a_{34} = a_{43} = 0{,}22$.

Obecně tyto vztahy můžeme zapsat $a_{ij} = a_{ji}$, $i, j = 1, \ldots, n$. Takováto matice se nazývá **symetrická.** Při řešení pomocí schématu jediného dělení je zřejmé, že také $b_{ij} = b_{ji}$, $c_{ij} = c_{ji}$ atd. Při zápisu řešení do tabulky (tabulka IV) je proto možné vynechat zapisování prvků stojících pod hlavní diagonálou. Provedením zpětného chodu určíme řešení $x_1 = -1{,}257\,80$, $x_2 = 0{,}043\,48$, $x_3 = 1{,}039\,17$, $x_4 = 1{,}482\,40$.

Metoda hlavních prvků

Pomocí schématu jediného dělení máme řešit soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} 6{,}01x_1 - 0{,}93x_2 + 9{,}24x_3 - 8{,}32x_4 &= -0{,}28 \\ 0{,}84x_1 - 0{,}13x_2 - 8{,}36x_3 + 0{,}25x_4 &= 2{,}44 \\ 8{,}44x_1 + 9{,}15x_2 - 0{,}18x_3 - 3{,}18x_4 &= 0{,}85 \\ 1{,}63x_1 - 5{,}66x_2 + 0{,}25x_3 - 7{,}43x_4 &= 3{,}24 \end{aligned}$$

Výpočty budeme zapisovat do tabulky V.

Soustava s trojúhelníkovou maticí má tvar

$$\begin{aligned} x_1 - 0{,}154\,74x_2 + 1{,}537\,44\,x_3 - 1{,}384\,36x_4 &= -0{,}046\,59; \\ x_2 + 482\,572{,}5x_3 - 70\,643\,\ x_4 &= -123\,957; \\ x_3 - 0{,}146\,39x_4 &= -0{,}256\,87; \\ x_4 &= 10{,}068\,11. \end{aligned}$$

Zpětným chodem dostáváme

$x_1 = 11{,}055\,01$, $x_2 = -6{,}237\,77$, $x_3 = 1{,}217\,00$, $x_4 = 10{,}068\,11$.

Zkouška (dosazením do původní soustavy)

$L_1 = 66{,}440\,61 + 5{,}801\,13 + 11{,}245\,08 - 83{,}766\,68 = -0{,}279\,86$;

$P_1 = -0{,}28$; $L_1 = P_1 + 0{,}000\,14$;

$L_2 = 9{,}286\,21 + 0{,}810\,91 - 10{,}174\,12 + 2{,}517\,03 = 2{,}440\,03$;

$P_2 = 2{,}44$; $L_2 = P_2 + 0{,}000\,03$;

$L_3 = 93{,}304\,28 - 57{,}075\,60 - 0{,}219\,06 - 32{,}016\,59 = 3{,}993\,03$;

$P_3 = 0{,}85$; $L_3 = P_3 + 3{,}143\,03$; $L_3 - P_3 = 370\ \%\ P_3$;

$L_4 = 18{,}019\,67 + 35{,}305\,78 + 0{,}304\,25 - 74{,}806\,06 = -21{,}176\,36$,

$P_4 = 3{,}24$; $L_4 = P_4 - 24{,}416\,36$; $|L_4 - P_4| = 755\ \%\ P_4$.

Tabulka V

Koeficienty u neznámých x_1	x_2	x_3	x_4	Absolutní člen	σ	Σ	Označení řádku (rovnice) a ekvivalentní úpravy
6,01	−0,93	9,24	−8,32	−0,28	5,72		[1]
0,84	−0,13	−8,36	0,25	2,44	−4,96		[2]
8,44	9,15	−0,18	−3,18	0,85	15,08		[3]
1,63	−5,66	0,25	−7,43	3,24	−7,97		[4]
1	−0,15474	1,53744	−1,38436	−0,04659	0,95175	0,95175	[1'] ~ [1] $\frac{1}{6,01}$
	−0,00002	− 9,65145	1,41286	2,47914	−5,75947	−5,75947	[2'] ~ [2] − 0,84 [1']
	10,45601	−13,15599	8,50400	1,24322	7,04724	7,04723	[3'] ~ [3] − 8,44 [1']
	−5,40777	− 2,25603	−5,17349	3,31594	−9,52135	−9,52135	[4'] ~ [4] − 1,63 [1']
	1	482572,50000	−70643,0000	−123957,00000	287973,50000	287973,50000	[2''] ~ [2'] $\left(-\frac{1}{0,00002}\right)$
		−5045796,04171	738652,41843	1296096,87479	−3011046,74849	−3011046,74849	[3''] ~ [3'] − 10,45601 [2'']
		2609638,83229	−382026,26960	−670327,62995	1557284,93274	1557284,93274	[4''] ~ [4'] + 5,40777 [2'']
		1	−0,14639	−0,25687	0,59674	0,59674	[3'''] ~ [3''] $\left(-\frac{1}{5045796,04171}\right)$
			−1,66411	−16,75444	−18,41655	−18,41856	[4'''] ~ [4''] − 2609638,83229 [3''']
			1	10,06811	11,06811	11,06811	[4^IV] ~ [4'''] $\left(-\frac{1}{1,66411}\right)$

Ze zkoušky vyplývá, že řešení vypočítané z výsledné soustavy **nevyhovuje soustavě** zadané. Při dosazení do třetí rovnice je absolutní hodnota rezidua téměř čtyřikrát větší než pravá strana a při dosazení do čtvrté rovnice je dokonce téměř osmkrát větší. To znamená, že není zaručena ani jediná platná číslice řešení.

V čem je příčina chybného výsledku, když všechny kontrolní součty vyšly velmi přesně a během výpočtu jsme ve druhém kroku počítali s dvojnásobným počtem číslic než v příkladu 9? Přitom rezidua v příkladu 9 měla maximální absolutní hodnotu 0,118 % $|P_1|$.

Rozebereme si podrobněji především druhý krok. Koeficient $b_{22} = 0{,}000\,02$ jsme vypočítali ze vztahu $b_{22} = a_{22} - \frac{a_{12}}{a_{11}} a_{21}$. Koeficient a_{22} jsme zadali jako úplné číslo. Výraz $\frac{a_{12}}{a_{11}} a_{21}$ je však číslo zaokrouhlené na 5 desetinných míst, takže jeho absolutní chyba je 0,000 005. Proto má i koeficient b_{22} absolutní chybu $\beta_{22} = 0{,}000\,005$. Relativní chyba je

$$\beta'_{22} = \frac{\beta_{22}}{b_{22}} = \frac{0{,}000\,005}{0{,}000\,02} = 25\ \%.$$

Relativní chyby

$$\beta'_{23} = \frac{\beta_{23}}{b_{23}},\ \beta'_{24} = \frac{\beta_{24}}{b_{24}},\ \varkappa'_2 = \frac{\varkappa_2}{q_2}$$

koeficientů b_{23}, b_{24} a absolutního členu q_2 jsou velmi nepatrné, přibližně

$$\beta'_{23} \doteq \beta'_{24} = \varkappa'_2 \doteq 0{,}000\,001 = 0{,}000\,1\ \%.$$

Protože relativní chyba podílu je rovna součtu relativních chyb dělence a dělitele, jsou relativní chyby

$$\gamma'_{22} = \frac{\gamma_{22}}{c_{22}},\ \gamma'_{23} = \frac{\gamma_{23}}{c_{23}},\ \gamma'_{24} = \frac{\gamma_{24}}{c_{24}},\ \varrho'_2 = \frac{\varrho_2}{r_2}$$

koeficientů

$$c_{22} = \frac{b_{22}}{b_{22}},\ c_{23} = \frac{b_{23}}{b_{22}},\ c_{24} = \frac{b_{24}}{b_{22}},\ r_2 = \frac{q_2}{b_{22}}$$

rovny

$$\gamma'_{22} \doteq \gamma'_{23} \doteq \gamma'_{24} \doteq \varrho'_2 \doteq \beta'_{22} + 0{,}000\,1\ \% \doteq 25\ \%.$$

Například absolutní chyba koeficientu $c_{23} = 482\,572{,}500\,00$ je (podle vztahu, že absolutní chyba je rovna součinu relativní chyby a střední aproximace čísla) rovna

$$\gamma_{23} = \gamma'_{23} \cdot c_{23} \doteq 120\,000,\ \text{takže}\ c_{23} = 567\,732{,}235\,3 \pm 120\,000,$$

z čehož ovšem vyplývá, že ani jedna z číslic není platná, a přibližně platí

$$500\,000 < c_{23} < 700\,000.$$

Podobně bychom došli k tomu, že také číslice, kterými jsme v tabulce zapsali koeficient c_{24} a absolutní člen r_2, nejsou platné.

Jelikož pro další koeficienty ve druhém kroku c_{ij}, kde $i, j < 2$, platí

$$c_{ij} = b_{ij} - b_{i2}c_{2j},$$

nemají ani tyto koeficienty v tabulce žádnou **platnou** číslici, neboť absolutní chyba součinů $b_{i2}c_{2j}$ je až miliónkrát větší než absolutní hodnota koeficientů b_{ij} pro $i, j > 2$. Tím jsme tedy ve druhém kroku ztratili všechny platné číslice a soustava, s kterou jsme pracovali ve třetím a čtvrtém kroku, není proto ekvivalentní se soustavou zadanou. Proto řešení soustavy s trojúhelníkovou maticí nemusí být řešením zadané soustavy.

Jak jsme zjistili na předcházejícím příkladu, není Gaussovo schéma zcela univerzální, neboť se může v některém kroku stát, že vedoucí prvek je velmi blízký nule, jako v tomto příkladu, nebo je přímo roven nule, což by nebylo v souhlase s předpokladem, který jsme vyslovili při obecném odvozování na str. 33. Abychom zjistili, je-li tento předpoklad splněn, museli bychom provést prakticky stejné výpočty, jaké vyžaduje provedení celého schématu.

Je proto vhodné schéma jediného dělení poněkud modifikovat a **nepředepisovat předem pořadí vylučovaných neznámých.** Jednou z nejlepších variant volby vedoucích prvků je schéma jediného dělení **hlavními prvky.** V tomto schématu nevolíme jako vedoucí prvek kroku koeficient, který stojí nejvíce vlevo ve druhém řádku předcházejícího kroku, ale ten, který má ze všech koeficientů rovnic, které budeme v tomto kroku upravovat, **největší absolutní hodnotu.** Nazýváme jej **hlavní prvek.**

Metodou hlavních prvků nyní soustavu vyřešíme.

Výpočet budeme zapisovat do tabulky VI; hlavní prvky jsou prvky v rámečcích.

Výsledná soustava je tvořena rovnicemi

$$\begin{array}{llll}
[1'] & 0{,}650\,43x_1 - 0{,}100\,65x_2 + x_3 - 0{,}900\,43x_4 & = & -0{,}030\,30; \\
[3''] & 0{,}937\,06x_1 \qquad\qquad + x_2 \qquad - 0{,}365\,98x_4 & = & 0{,}092\,48; \\
[4'''] & -0{,}728\,12x_1 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + x_4 & = & -0{,}406\,67; \\
[2^{\mathrm{IV}}] & x_1 & = & -0{,}507\,73
\end{array}$$

Tabulka VI

Koeficienty u neznámých x_1	x_2	x_3	x_4	Absolutní člen	σ	Σ	Označení řádku (rovnice) a ekvivalentní úpravy
6,01	−0,93	$\boxed{9{,}24}$	−8,32	−0,28	5,72		[1]
0,84	−0,13	−8,36	0,25	2,44	−4,96		[2]
8,44	9,15	−0,18	−3,18	0,85	15,08		[3]
1,63	−5,66	0,25	−7,43	3,24	−7,97		[4]
0,65043	−0,10065	1	−0,90043	−0,03030	0,61905	0,61905	$[1'] \sim [1]\,\frac{1}{9{,}24}$
6,27759	−0,97143		−7,27759	2,18669	0,21526	0,21526	$[2'] \sim [2] + 8{,}36\,[1']$
8,55708	$\boxed{9{,}13188}$		−3,34208	0,84455	15,19143	15,19143	$[3'] \sim [3] + 0{,}18\,[1']$
1,46739	−5,63484		−7,20489	3,24758	−8,12476	−8,12476	$[4'] \sim [4] - 0{,}25\,[1']$
7,18787			−7,63311	2,27653	1,83129	1,83129	$[2''] \sim [2'] + 0{,}97143\,[3'']$
0,93706	1		−0,36598	0,09248	1,66356	1,66356	$[3''] \sim [3']\,\frac{1}{9{,}13188}$
6,74757			$\boxed{-9{,}26713}$	3,76869	1,24913	1,24913	$[4''] \sim [4'] + 5{,}63484\,[3'']$
$\boxed{1{,}63005}$				−0,82763	0,80242	0,80242	$[2'''] \sim [2''] + 7{,}63311\,[4''']$
−0,72812			1	−0,40667	−0,13479	−0,13479	$[4'''] \sim [4'']\left(-\frac{1}{9{,}26713}\right)$
1				−0,50773	0,49227	0,49227	$[2^{\mathrm{IV}}] \sim [2''']\,\frac{1}{1{,}63005}$

a vhodným uspořádáním neznámých ji můžeme napsat tak, aby měla trojúhelníkovou matici, tj.

$$\begin{aligned} x_3 - 0{,}100\,65x_2 - 0{,}900\,43x_4 + 0{,}650\,43x_1 &= -0{,}030\,30; \\ x_2 - 0{,}365\,98x_4 + 0{,}937\,06x_1 &= 0{,}092\,48; \\ x_4 - 0{,}728\,12x_1 &= -0{,}406\,67; \\ x_1 &= -0{,}507\,73. \end{aligned}$$

Pořadí vypočítávaných neznámých ve zpětném chodu se ovšem změní. V našem případě je pořadí vypočítávaných neznámých x_1, x_4, x_2, x_3. Řešení soustavy je

$x_1 = -0{,}507\,73,\ x_2 = 0{,}284\,12,\ x_3 = -0{,}370\,52,\ x_4 = -0{,}776\,36.$

Zkouška:

$$L_1 = -3{,}051\,46 - 0{,}264\,23 - 3{,}423\,60 + 6{,}459\,32 = -0{,}279\,97;$$
$$P_1 = -0{,}28;\ L_1 = P_1 + 0{,}000\,3;$$
$$L_2 = 0{,}426\,49 - 0{,}036\,94 + 3{,}097\,55 - 0{,}194\,09 = 2{,}440\,03;$$
$$P_2 = 2{,}44;\ L_2 = P_2 + 0{,}000\,3;$$
$$L_3 = -4{,}285\,24 + 2{,}599\,70 + 0{,}066\,69 + 2{,}468\,82 = 0{,}849\,97;$$
$$P_3 = 0{,}85;\ L_3 = P_3 - 0{,}000\,3;$$
$$L_4 = -0{,}827\,60 - 1{,}608\,12 - 0{,}092\,63 + 5{,}768\,35 = 3{,}240\,00;$$
$$P_4 = 3{,}24;\ L_4 = P_4.$$

Řešení vypočítané metodou hlavních prvků splňuje soustavu velmi dobře. Úbytek platných číslic při řešení touto metodou je velmi nepatrný, neboť koeficienty rovnic [1'], [3''], [4''], [2$^{\text{IV}}$], pomocí nichž jsme eliminovali, jsou velmi malé, takže při zaokrouhlení na 5 desetinných míst jsou všechny jejich číslice platné. Úpravy zasahují číslice nižších řádů, například $c_{24} = b_{24} - 0{,}355\,52$. Početní pracnost je také mnohem menší, neboť při výpočtech se vyskytují maximálně šesticiferná čísla.

Úvodní příklad 9 na schéma jediného dělení byl již tak sestaven, aby vedoucí prvky byly současně hlavními prvky, proto vypočítané řešení velmi dobře vyhovovalo soustavě.

Příklad 11. Metodou hlavních prvků řešte soustavu:

$$\begin{aligned} 0{,}12x_1 - 2{,}41x_2 - 0{,}34x_3 + 0{,}16x_4 &= 0{,}32 \\ 0{,}25x_1 + 0{,}1\ x_2 + 5{,}32x_3 - 0{,}42x_4 &= 0{,}64 \\ 0{,}93x_1 + 0{,}62x_2 - 0{,}44x_3 + 0{,}13x_4 &= -0{,}52 \\ 0{,}21x_1 - 0{,}48x_2 - 0{,}11x_3 + 4{,}45x_4 &= 0{,}74 \end{aligned}$$

Tabulka VII

Koeficienty u x_1	x_2	x_3	x_4	Absolutní člen	σ	Σ	Řádek (rovnice)
0,12	−2,41	−0,34	0,16	0,32	−2,15		[1]
0,25	0,1	$\boxed{5{,}32}$	−0,42	0,64	5,89		[2]
0,93	0,62	−0,44	0,13	−0,52	0,72		[3]
0,21	−0,48	−0,11	4,45	0,74	4,81		[4]
0,136	−2,404		0,133	0,361	−1,774	−1,774	[1'] ~ [1] + 0,34 [2']
0,047	0,019	1	−0,079	0,120	1,107	1,107	[2'] ~ [2] $\frac{1}{5{,}32}$
0,951	0,628		0,095	−0,467	1,207	1,207	[3'] ~ [3] + 0,44 [2']
0,215	−0,478		$\boxed{4{,}441}$	0,753	4,931	4,931	[4'] ~ [4] + 0,11 [2']
0,130	$\boxed{-2{,}389}$			0,338	−1,921	−1,921	[1''] ~ [1'] − 0,133 [4'']
0,946	0,639			−0,483	1,102	1,102	[3''] ~ [3'] − 0,095 [4'']
0,048	−0,108		1	0,170	1,110	1,110	[4''] ~ [4'] $\frac{1}{4{,}441}$
−0,054	1			−0,142	0,804	0,804	[1'''] ~ [1''] $\left(-\frac{1}{2{,}389}\right)$
$\boxed{0{,}981}$				−0,393	0,588	0,588	[3'''] ~ [3''] − 0,639 [1''']
1				−0,401	0,599	0,599	[3$^{\text{IV}}$] ~ [3'''] $\frac{1}{0{,}981}$

Výpočty budeme provádět na logaritmickém pravítku a zapisovat ve tvaru tabulky VII.

Došli jsme k soustavě

$$\begin{aligned} 0{,}047x_1 + 0{,}019x_2 + x_3 - 0{,}079x_4 &= 0{,}120;\\ 0{,}048x_1 - 0{,}108x_2 \qquad\qquad + x_4 &= 0{,}170;\\ -0{,}054x_1 + \qquad x_2 \qquad\qquad &= -0{,}142;\\ x_1 \qquad\qquad\qquad &= -0{,}401. \end{aligned}$$

Zpětný chod bude spočívat v dosazení za x_1 do 3. rovnice, za x_1, x_2 do 2. rovnice a za x_1, x_2, x_4 do 1. rovnice. Dostaneme řešení

$$x_1 = -4{,}40,\ x_2 = -0{,}16,\ x_3 = 0{,}16,\ x_4 = 0{,}17.$$

Počet operací ve schématu jediného dělení

Nakonec nás bude ještě zajímat, kolikrát musíme celkem násobit a dělit při řešení soustavy n rovnic o n neznámých pomocí schématu jediného dělení. Protože v schématu hlavních prvků je stejný počet operací, budeme vyšetřovat pouze základní modifikaci schématu jediného dělení.

Přímý chod

První krok. Nejdříve jsme všechny koeficienty, absolutní člen a kontrolní součet řádku [1] vydělili koeficientem a_{11}. Provedli jsme tedy celkem

$$P_1' = n + 2 \text{ dělení.}$$

Potom jsme postupně vynásobili všechny koeficienty, absolutní člen a kontrolní součet řádku [1'] čísly $a_{21}, a_{31}, \ldots, a_{n1}$, abychom je mohli odečíst od čísel v řádcích [2], [3], ..., [n]. Násobení koeficientu $b_{11} = 1$ nebereme v úvahu. Protože v řádku [1'] jsme násobili $n + 1$ čísel a celkový počet koeficientů $a_{21}, a_{31}, \ldots, a_{n1}$ je $n - 1$, provedli jsme celkem

$$P_1'' = (n + 1)(n - 1)$$

násobení, takže v prvním kroku jsme provedli celkem $P_1 = P_1' + P_1'' = n + 2 + (n + 1)(n - 1)$ násobení a dělení. Po úpravě dostáváme

$$P_1 = n^2 + n + 1.$$

Druhý krok. Ve druhém kroku bylo o jeden upravovaný řádek a jeden prvek v každém řádku méně. Proto použijeme vztahu odvozeného v prvním kroku, místo n však do něho dosadíme $n - 1$.

$$P_2 = (n - 1)^2 + (n - 1) + 1$$

Třetí krok.

$$P_3 = (n - 2)^2 + (n - 2) + 1$$

atd.

i-tý krok.

V i-tém kroku, kde i je přirozené číslo $1 \leq i \leq n$, bylo o $i - 1$ upravovaných řádků a $i - 1$ prvků v každém řádku méně, čili

$$P_i = (n - i + 1)^2 + (n - i + 1) + 1 = n^2 + 3n + 3 + i^2 - 2ni - 3i.$$

Celkový počet násobení a dělení v přímém chodu je

$$P = P_1 + P_2 + \ldots + P_n = \sum_{i=1}^{n} (n^2 + 3n + 3 + i^2 - 2ni - 3i).$$

Tento součet můžeme rozdělit na šest součtů

$$P = \sum_{i=1}^{n} n^2 + \sum_{i=1}^{n} 3n + \sum_{i=1}^{n} 3 + \sum_{i=1}^{n} i^2 - \sum_{i=1}^{n} 2ni - \sum_{i=1}^{n} 3i.$$

První tři součty vypočítáme snadno. Jde totiž o to n-krát sečíst totéž číslo, neboli vynásobit toto číslo číslem n, takže

$$\sum_{i=1}^{n} n^2 = n^2 \,.\, n = n^3, \sum_{i=1}^{n} 3n = 3n \,.\, n = 3n^2, \sum_{i=1}^{n} 3 = 3n.$$

Součet $\sum_{i=1}^{n} i^2$ vypočítejte podobně jako součet $\sum_{i=1}^{n} i^3$ v příkladu 4 a dostanete výsledek

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}.$$

Podobně vypočítáme po vytknutí $2n$ a 3 součty

$$\sum_{i=1}^{n} 2ni = 2n \sum_{i=1}^{n} i = n^3 + n^2, \sum_{i=1}^{n} 3i = 3 \sum_{i=1}^{n} i = \frac{3n^2 + 3n}{2}.$$

Po dosazení dostaneme

$$P = n^3 + 3n^2 + 3n + \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} - n^2 - n^2 - \frac{3n^2 + 3n}{2}$$

a po úpravě

$$P = \frac{n}{3}(n^2 + 3n + 5).$$

Zpětný chod

První krok. Dosadíme za x_n z n-té rovnice soustavy s trojúhelníkovou maticí do rovnice předposlední. Provedeme tedy $Z_1 = 1$ násobení.

Druhý krok. Dosadíme za x_n a x_{n-1}, provedeme tedy $Z_2 = 2$ násobení.

i-tý krok. $Z_i = i$.

Celkem provedeme ve zpětném chodu $n - 1$ kroků. Celkový počet násobení tedy je

$$Z = Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_{n-1} = 1 + 2 + \ldots + (n-1) = \sum_{i=1}^{n-1} i,$$

$$Z = \frac{n^2 - n}{2}.$$

Počet násobení a dělení potřebný k vyřešení soustavy n rovnic o n neznámých pomocí schématu jediného dělení (popřípadě schématu hlavních prvků) tedy je

$$C = P + Z = \frac{n}{3}(n^2 + 3n + 5) + \frac{n^2 - n}{2},$$

$$C = \frac{n}{6}(2n^2 + 9n + 7).$$

Následující tabulka ukazuje, jak vzrůstá počet operací při zvyšování počtu rovnic:

Tabulka VIII

Počet rovnic	3	4	5	6	7	8	9	10	20	50	100	500
Počet násobení a dělení	23	50	85	133	196	276	366	495	3 290	45 475	393 900	42 042 250

Jordanovo schéma

Eliminační proces lze také upravit tak, aby se jím daná soustava převedla na soustavu s maticí

$$\begin{Vmatrix} a_{11}, & 0, & 0, & \ldots, 0 \\ 0, & a_{22}, & 0, & \ldots, 0 \\ 0; & 0, & a_{33}, & \ldots, 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & 0, & 0, & \ldots, a_{nn} \end{Vmatrix}.$$

Uvedená matice, v níž všechny prvky kromě hlavní diagonály jsou nulové, se nazývá **diagonální.** Řešení soustavy s takovou maticí je velmi snadné.

Postup eliminace, kterým dospějeme k diagonální matici, je týž jako v kterémkoli jiném Gaussově schématu, jen s tím rozdílem, že při každém kroku zahrneme do výpočtu i rovnice, jejichž pomocí jsme vylučovali neznámé ve všech předcházejících krocích. Počítáme tedy během celého eliminačního procesu stále s n rovnicemi. Ukážeme si postup na příkladu.

Příklad 12. Na příkladu 9 ze str. 36 si ukážeme úpravu schématu jediného dělení (tab. III) na Jordanovo schéma (tab. IX) a porovnáme oba postupy.

První krok je v obou schématech zcela stejný. Porovnáme-li však druhý krok, vidíme, že v tabulce IX je o jeden řádek více. Druhý až čtvrtý řádek tabulky IX se shoduje s prvním až třetím řádkem tabulky III. Řádek [1″] v tabulce IX vznikl úpravou [1″] ∾ [1′] + 0,066 15 [2″]. Touto úpravou se nezměnil prvek 1 v prvním sloupci řádku [1′], neboť v prvním sloupci řádku [2″], který eliminujeme, je nula. Ve druhém sloupci řádku [1″] je nula, neboť ve druhém sloupci řádku [2″] je 1, tj. $0 = -0{,}066\,15 + 0{,}066\,15 \,.\, 1$. Podobně úpravou [1″] ∾ [1′] + + 0,066 15 [2″] vznikly další prvky řádku [1″]. Ve třetím kroku tabulky IX je o dva řádky více než ve třetím kroku tabulky III. Třetí a čtvrtý řádek tabulky IX se shoduje s prvním a druhým řádkem tabulky III. Řádky [1‴] a [2‴] byly opět vytvořeny obdobně jako řádek [1″] při prvním kroku, a to tak, že jsme odečtením vhodných násobků prvků řádku [3‴] vyloučili prvky třetího sloupce nejen z řádku [4‴], Tabulka IX

Koeficienty u x_1	x_2	x_3	x_4	Absolutní člen	σ	Σ	Řádek (rovnice)
5,14	−0,34	0,13	−0,43	0,11	4,61		[1]
4,43	2,43	−0,18	−2,36	−0,46	3,86		[2]
0,22	2,22	0,93	−2,25	0,28	1,40		[3]
−4,47	0,63	0,95	−0,28	0,98	−2,19		[4]
1	−0,06615	0,02529	−0,08366	0,02140	0,89688	0,89689	$[1'] \sim [1]\,\frac{1}{5{,}14}$
	2,72304	−0,29203	−1,98939	−0,55480	−0,11318	−0,11318	$[2'] \sim [2] - 4{,}43\,[1']$
	2,23455	0,92444	−2,23159	0,27529	1,20269	1,20269	$[3'] \sim [3] - 0{,}22\,[1']$
	0,33431	1,06305	−0,65396	1,07566	1,81905	1,81905	$[4'] \sim [4] + 4{,}47\,[1']$
1		0,01820	−0,13199	0,00792	0,89413	0,89413	$[1''] \sim [1'] + 0{,}06615\,[2'']$
	1	−0,10724	−0,73058	−0,20374	−0,04156	−0,04156	$[2''] \sim [2']\,\frac{1}{2{,}72304}$
		1,16407	−0,59907	0,73056	1,29556	1,29556	$[3''] \sim [3'] - 2{,}23455\,[2'']$
		1,09890	−0,40972	1,14377	1,83295	1,83294	$[4''] \sim [4'] - 0{,}33431\,[2'']$
1			−0,12262	−0,00350	0,87388	0,87387	$[1'''] \sim [1''] - 0{,}01820\,[3''']$
	1		−0,78577	−0,13644	0,07779	0,07779	$[2'''] \sim [2''] + 0{,}10724\,[3''']$
		1	−0,51463	0,62759	1,11296	1,11296	$[3'''] \sim [3'']\,\frac{1}{1{,}16407}$
			0,15581	0,45411	0,60992	0,60992	$[4'''] \sim [4''] - 1{,}09890\,[3''']$
1				0,35388	1,35388	1,35388	$[1^{IV}] \sim [1'''] + 0{,}12262\,[4^{IV}]$
	1			2,15369	3,15369	3,15369	$[2^{IV}] \sim [2'''] + 0{,}78577\,[4^{IV}]$
		1		2,12748	3,12748	3,12748	$[3^{IV}] \sim [3'''] + 0{,}51463\,[4^{IV}]$
			1	2,91451	3,91451	3,91451	$[4^{IV}] \sim [4''']\,\frac{1}{0{,}15581}$

ale též z řádků $[1''']$ a $[2''']$. Přitom v prvním sloupci řádku $[1''']$ a ve druhém sloupci řádku $[2''']$ zůstaly prvky 1. V posledním kroku jsme odečtením vhodných násobků prvků řádku $[4^{IV}]$ vyloučili prvky čtvrtého sloupce z řádků $[1''']$, $[2''']$ a $[3''']$, a vytvořili jsme tak řádky $[1^{IV}]$, $[2^{IV}]$ a $[3^{IV}]$. Řádek $[1^{IV}]$ přiřazuje neznámé x_1 koeficient 1, řádek $[2^{IV}]$ přiřazuje koeficient 1 neznámé x_2, řádek $[3^{IV}]$ neznámé x_3 a řádek $[4^{IV}]$ přiřazuje koeficient 1 neznámé x_4. Všechny ostatní koeficienty jsou nulové, takže absolutní členy v řádcích $[1^{IV}]$ až $[4^{IV}]$ jsou rovny přímo neznámým. Zpětný chod odpadá a řešení soustavy je

$[1^{IV}]$ $\qquad x_1 = 0{,}353\,88;$
$[2^{IV}]$ $\qquad x_2 = 2{,}153\,69;$
$[3^{IV}]$ $\qquad x_3 = 2{,}127\,48;$
$[4^{IV}]$ $\qquad x_4 = 2{,}914\,51.$

Matice soustavy je

$$\begin{Vmatrix} 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{Vmatrix}.$$

Počet operací v Jordanově schématu je o něco větší než v jiných schématech, zato však nemusíme provádět zpětný chod, přičemž během celého řešení provádíme součtovou kontrolu správnosti výpočtů.

Příklad 13. Jordanovou metodou řešte soustavu

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - 3x_3 &= 3 \\ -3x_2 - 2x_3 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 &= -3. \end{aligned}$$

Postup řešení budeme zapisovat pomocí matic. Znaménko $\sim$ mezi maticemi bude opět znamenat, že jde o matice (rozšířené) ekvivalentních soustav.

$$\begin{Vmatrix} 1, & -2, & -3, & 3 \\ 0, & -3, & -2, & 1 \\ 2, & -1, & 0, & -3 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1, & -2, & -3, & 3 \\ 0, & -3, & -2, & 1 \\ 0, & 3, & 6, & -9 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 3, & 0, & -5, & 7 \\ 0, & -3, & -2, & 1 \\ 0, & 0, & 4, & -8 \end{Vmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{Vmatrix} 12, & 0, & 0, & -12 \\ 0, & -3, & 0, & -3 \\ 0, & 0, & 4, & -8 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1, & 0, & 0, & -1 \\ 0, & 1, & 0, & 1 \\ 0, & 0, & 1, & -2 \end{Vmatrix}$$

Tabulka X

Koeficienty u				Absolutní členy			σ	Σ	Řádek
x_1	x_2	x_3	x_4	1. soust.	2. soust.	3. soust.			
1,00	0,42	0,54	0,66	0,25	0,3	0,15	3,32		[1]
0,42	1,00	0,32	0,44	0,45	0,5	0,30	3,43		[2]
0,54	0,32	1,00	0,22	0,65	0,7	0,45	3,88		[3]
0,66	0,44	0,22	1,00	0,85	0,9	0,60	4,67		[4]
1	0,42	0,54	0,66	0,25	0,3	0,15	3,32	3,32	$[1'] \sim [1]\,\frac{1}{1}$
	0,82360	0,09320	0,16280	0,34500	0,37400	0,23700	2,03560	2,03560	$[2'] \sim [2] - 0{,}42\,[1']$
	0,09320	0,70840	−0,13640	0,51500	0,53800	0,36900	2,08720	2,08720	$[3'] \sim [3] - 0{,}54\,[1']$
	0,16280	−0,13640	0,56440	0,68500	0,70200	0,50100	2,47880	2,47880	$[4'] \sim [4] - 0{,}66\,[1']$
	1	0,11316	0,19767	0,41889	0,45410	0,28776	2,47158	2,47159	$[2''] \sim [2']\,\frac{1}{0{,}82360}$
		0,69785	−0,15482	0,47596	0,49568	0,34218	1,85685	1,85685	$[3''] \sim [3'] - 0{,}09320\,[2'']$
		−0,15482	0,53222	0,61680	0,62807	0,45415	2,07642	2,07643	$[4''] \sim [4'] - 0{,}16280\,[2'']$
		1	−0,22185	0,68204	0,71030	0,49033	2,66082	2,66082	$[3'''] \sim [3'']\,\frac{1}{0{,}69785}$
			0,49787	0,72239	0,73804	0,53006	2,48836	2,48837	$[4'''] \sim [4''] + 0{,}15482\,[3''']$
			1	1,45096	1,48240	1,06466	4,99802	4,99803	$[4^{IV}] \sim [4''']\,\frac{1}{0{,}49787}$

Řešení soustavy je

$$x_1 = -1,\quad x_2 = 1,\quad x_3 = -2.$$

Současné řešení několika soustav

Při řešení některých problémů se setkáváme s úlohou řešit takové soustavy, které mají stejnou matici soustavy a navzájem se liší pouze absolutními členy. Při řešení takových soustav ušetříme mnoho práce, použijeme-li k převedení rozšířené matice na trojúhelníkovou matici jediného schématu. Ukážeme si současné řešení tří soustav, z nichž každá obsahuje čtyři rovnice o čtyřech neznámých. Kontrolní součty jsou opět součty všech prvků v daném řádku; v posledním sloupci je opět předpis naznačující příslušnou ekvivalentní úpravu. Soustavy nebudeme vypisovat, ale jejich koeficienty a absolutní členy zapíšeme do tabulky X. Pro přehlednost jsme již rovnice uspořádali tak, aby hlavní prvky stály vždy vlevo v první rovnici daného kroku. Po provedení zpětného chodu, který musíme provést pro každou soustavu zvlášť, dostaneme řešení.

1. soustava: $x_1 = 1{,}450\,96;\ x_2 = 1{,}003\,94;\ x_3 = 0{,}018\,47;$
   $x_4 = -1{,}257\,52;$
2. soustava: $x_1 = 1{,}482\,40;\ x_2 = 1{,}039\,17;\ x_3 = 0{,}043\,48;$
   $x_4 = -1{,}257\,80;$
3. soustava: $x_1 = 1{,}064\,66;\ x_2 = 0{,}726\,52;\ x_3 = -0{,}004\,90;$
   $x_4 = -0{,}942\,94.$

K současnému řešení několika soustav lze ovšem použít kteréhokoli Gaussova schématu i schématu Jordanova.

CVIČENÍ

28. Řešte následující soustavy rovnic. Výpočty provádějte podle možnosti na kalkulačních strojích při praxi v SPS:

a)
$$\begin{aligned} 4{,}5x_1 - 0{,}6x_2 - 0{,}9x_3 &= 2{,}9 \\ -1{,}1x_1 + 5{,}8x_2 \phantom{- 0{,}9x_3} &= -5{,}8 \\ 11x_1 + 3{,}2x_2 - 8{,}6x_3 &= 0{,}3 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x_1 + 0{,}17x_2 - 0{,}25x_3 + 0{,}54x_4 &= 0{,}3\\ 0{,}47x_1 + x_2 + 0{,}67x_3 - 0{,}32x_4 &= 0{,}5\\ -0{,}11x_1 + 0{,}35x_2 + x_3 - 0{,}74x_4 &= 0{,}7\\ 0{,}55x_1 + 0{,}43x_2 + 0{,}36x_3 + x_4 &= 0{,}9 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 3{,}81x_1 + 2{,}14x_2 - 1{,}33x_3 + 0{,}91x_4 &= 13{,}6892\\ 1{,}12x_1 - 0{,}87x_2 + 3{,}16x_3 + 1{,}52x_4 &= -3{,}5555\\ 2{,}52x_1 + 1{,}30x_2 + 2{,}16x_3 + 0{,}14x_4 &= 11{,}3072\\ 0{,}81x_1 + 2{,}13x_2 - 1{,}04x_3 + 0{,}86x_4 &= 6{,}6653 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} 1{,}1161x_1 + 0{,}1254x_2 + 0{,}1397x_3 + 0{,}1490\ x_4 &= 1{,}5471\\ 0{,}1582x_1 + 1{,}1675x_2 + 0{,}1768x_3 + 0{,}18711x_4 &= 1{,}6471\\ 0{,}1968x_1 + 0{,}2071x_2 + 1{,}2168x_3 + 0{,}2271\ x_4 &= 1{,}7471\\ 0{,}2368x_1 + 0{,}2471x_2 + 0{,}2568x_3 + 1{,}2671\ x_4 &= 1{,}8471 \end{aligned}$$

29. Určete rovnici kružnice opsané trojúhelníku ABC, jehož vrcholy jsou $A(4, -2)$; $B(4, 6)$; $C(-3, 5)$.

30. Řešte současně soustavy rovnic:

	1. soust.	2. soust.	3. soust.	4. soust.
$0{,}24x_1 - 0{,}91x_2 + 0{,}13x_3 =$	0,48	0,87	−0,42	0,04
$0{,}83x_2 - 0{,}64x_3 =$	−0,7	−1,04	0,7	−0,57
$0{,}57x_1 + 0{,}46x_3 =$	0,81	0,92	−0,67	−0,17

2. ŘEŠITELNOST SOUSTAV

A. HODNOST MATICE

Vektor n-členný

Při řešení soustav rovnic jsme pracovali s uspořádanými n-ticemi čísel, tj. s takovými n-ticemi, v nichž záleželo na pořadí jednotlivých čísel. Např. každé řešení soustavy rovnic o n neznámých je uspořádaná n-tice $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, i-tý řádek matice soustavy je uspořádaná n-tice $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$, absolutní členy soustavy m rovnic tvoří uspořádanou m-tici $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$, j-tý sloupec matice soustavy je uspořádaná m-tice $(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})$. Protože s uspořádanými n-ticemi čísel budeme pracovat i v dalších kapitolách, zavedeme pro ně některé pojmy a početní operace, které nám umožňují značně zjednodušit formulace v teoretických úvahách.

Nejdříve budeme definovat rovnost a sčítání uspořádaných n-tic a násobení n-tice číslem:

a) O uspořádaných n-ticích $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ a $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ budeme říkat, že se sobě rovnají, bude-li platit $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, $\ldots$, $a_n = b_n$.

b) Součtem uspořádaných n-tic $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ a $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ budeme rozumět uspořádanou n-tici $(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$. Tak např. $(2, -3{,}4, -7) + (-1, 2, 3, 5) = (1, -1, 7, -2)$, neboť $2 - 1 = 1$, $-3 + 2 = -1$, $4 + 3 = 7$, $-7 + 5 = -2$.

c) Uspořádanou n-tici $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ vynásobíme číslem α, vynásobíme-li tímto číslem všechna čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$, tj.

$$\alpha(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (\alpha a_1, \alpha a_2, \ldots, \alpha a_n).$$

Množinu všech uspořádaných n-tic čísel, pro které je definována rovnost, sčítání a násobení definicemi a), b), c), budeme nazývat **n-rozměrný vektorový prostor.** Každý prvek této množiny, tj. uspořádanou n-tici čísel $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, nazveme **n-členný vektor.** Čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jsou tzv. **složky vektoru** $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Vektor n-členný budeme symbolicky značit malými tučnými písmeny. Např. i-tý řádek matice soustavy o n neznámých je n-členný vektor $\boldsymbol{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$.

Vektor $\boldsymbol{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ je tzv. nulový vektor.

Příklad 14. Určíme součet vektorů
$\boldsymbol{a} = (-2{,}3, -7, -6, -9)$, $\boldsymbol{b} = (6, 4, 3, 2, 1)$, $\boldsymbol{c} = (2, -4, 8, -4, -16)$,
$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = (-2 + 6 + 2,\ 3 + 4 - 4,\ -7 + 3 + 8,\ -6 + 2 - 4,\ -9 + 1 - 16) = (6, 3, 4, -8, -24)$.

Příklad 15. Určíme vektor $\boldsymbol{b} = \alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \alpha_2\boldsymbol{a}_2 + \alpha_3\boldsymbol{a}_3$, je-li $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = -3$, $\alpha_3 = 4$, $\boldsymbol{a}_1 = (3, -2, 5, 4)$, $\boldsymbol{a}_2 = (-1, 3, -2, 5)$, $\boldsymbol{a}_3 = (1, 0, -3, 2)$.

Pro složky vektoru $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ platí

$b_1 = 3\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 6 + 3 + 4 = 13$,
$b_2 = -2\alpha_1 + 3\alpha_1 + 0\alpha_3 = -4 - 9 = -13$, $b_3 = 4$, $b_4 = 1$.

Tedy $\boldsymbol{b} = (13, -13, 4, 1)$.

Příklad 16. Eliminační metodou řešte soustavu

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 1 \\ -3x_1 - 5x_2 &= 7. \end{aligned}$$

Řádky rozšířené matice této soustavy jsou vektory $\boldsymbol{a}_1 = (1, 1, 1, -2)$, $\boldsymbol{a}_2 = (3, 4, 2, 1)$, $\boldsymbol{a}_3 = (-3, -5, 0, 7)$. Označíme-li řádky rozšířené matice soustavy po vyloučení x_1 z druhé a třetí rovnice symboly $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$, můžeme příslušné ekvivalentní úpravy zapsat pomocí vektorů takto: $\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_2 - 3\boldsymbol{a}_1 = (0, 1, -1, -5)$, $\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{a}_3 + 3\boldsymbol{a}_1 = (0, -2, 3, 13)$. Vznikla matice

$$\left\| \begin{matrix} 1, & 1, & 1, & 2 \\ 0, & 1, & -1, & -5 \\ 0, & -2, & 3, & 13 \end{matrix} \right\|.$$

Označíme-li řádky výsledné trojúhelníkové matice symboly $\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3$, platí $\boldsymbol{c}_1 = \boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{c}_2 = \boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{c}_3 = \boldsymbol{b}_3 + 2\boldsymbol{b}_2 = (0, 0, 1, 3)$, takže trojúhelníková matice je

$$\left\| \begin{matrix} 1, & 1, & 1, & 2 \\ 0, & 1, & -1, & -5 \\ 0, & 0, & 1, & 3 \end{matrix} \right\|.$$

Po provedení zpětného chodu dostaneme řešení $\boldsymbol{x} = (1, -2, 3)$.

Lineární závislost vektorů

Pro další úvahy bude účelné zavést pojmy lineární závislosti, lineární nezávislosti a lineární kombinace vektorů.

a) Mějme m vektorů $\boldsymbol{a}_1 = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n})$, $\boldsymbol{a}_2 = (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n})$, ..., $\boldsymbol{a}_m = (a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn})$ vesměs n-členných. Existují-li čísla $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, z nichž aspoň jedno je nenulové, přičemž platí $\alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \alpha_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + \alpha_m\boldsymbol{a}_m = \boldsymbol{0}$, což rozepsáno ve složkách znamená

$$\begin{aligned} \alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{21} + \ldots + \alpha_m a_{m1} &= 0, \\ \alpha_1 a_{12} + \alpha_2 a_{22} + \ldots + \alpha_m a_{m2} &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \alpha_1 a_{1n} + \alpha_2 a_{2n} + \ldots + \alpha_m a_{mn} &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

říkáme, že vektory $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ jsou **lineárně závislé.**

Platí-li vztah (1) pouze pro $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0$, říkáme, že vektory $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ jsou **lineárně nezávislé.**

Příklad 17. Dokažte, že vektory $\boldsymbol{a}_1 = (3, -2, 2, 4, -6)$, $\boldsymbol{a}_2 = (2, -4, 3, -2, 1)$, $\boldsymbol{a}_3 = (5, -3, 1, 0, -4)$, $\boldsymbol{a}_4 = (9, -5, -1, -8, 0)$ jsou lineárně závislé s koeficienty lineární závislosti

$$\alpha_1 = -2,\ \alpha_2 = 0,\ \alpha_3 = 3,\ \alpha_4 = -1.$$

O lineární závislosti těchto vektorů se přesvědčíme přímým výpočtem: $-2\boldsymbol{a}_1 + 0\boldsymbol{a}_2 + 3\boldsymbol{a}_3 - \boldsymbol{a}_4 = (-6, 4, -4, -8, 12) + (0, 0, 0, 0, 0) + (15, -9, 3, 0, -12) + (-9, +5, 1, 8, 0) = (0, 0, 0, 0, 0) = \boldsymbol{0}$. Výsledný vektor je nulový a vektory $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ jsou lineárně závislé, neboť např. $\alpha_1 \neq 0$.

b) Mějme vektor $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ a vektory $\boldsymbol{a}_1 = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n})$, $\boldsymbol{a}_2 = (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n})$, ..., $\boldsymbol{a}_m = (a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn})$. Existují-li čísla $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, přičemž platí $\alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \alpha_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + \alpha_m\boldsymbol{a}_m = \boldsymbol{b}$, což rozepsáno ve složkách znamená

$$\begin{aligned} \alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{21} + \ldots + \alpha_m a_{m1} &= b_1, \\ \alpha_1 a_{12} + \alpha_2 a_{22} + \ldots + \alpha_m a_{m2} &= b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \alpha_1 a_{1n} + \alpha_2 a_{2n} + \ldots + \alpha_m a_{mn} &= b_{mn}, \end{aligned}$$

říkáme, že vektor $\boldsymbol{b}$ je **lineární kombinací vektorů** $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$.

Příklad 18. Dokažte, že vektor $\boldsymbol{b} = (-7, 3, 4, -5)$ je lineární kombinací vektorů $\boldsymbol{a}_1 = (-1, 0, -2, 3)$, $\boldsymbol{a}_2 = (1, -3, 4, -2)$, $\boldsymbol{a}_3 = (-1, -3, 4, -1)$.

Podle definice lineární kombinace máme dokázat, že existují čísla $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ taková, že platí $\alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \alpha_2\boldsymbol{a}_2 + \alpha_3\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{b}$, což rozepsáno ve složkách představuje soustavu čtyř rovnic o třech neznámých

$$\begin{aligned} -\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 &= -7 \\ -3\alpha_2 - 3\alpha_3 &= 3 \\ -2\alpha_1 + 4\alpha_2 + 4\alpha_3 &= 4 \\ 3\alpha_1 - 2\alpha_2 - \alpha_3 &= -5. \end{aligned}$$

Tuto soustavu vyřešíme

$$\left\|\begin{matrix} -1, & 1, & -1, & -7 \\ 0, & -3, & -3, & 3 \\ -2, & 4, & 4, & 4 \\ 3, & -2, & -1, & -5 \end{matrix}\right\| \sim \left\|\begin{matrix} -1, & 1, & -1, & -7 \\ 0, & 1, & 1, & -1 \\ 0, & 1, & 3, & 9 \\ 0, & 1, & -4, & -26 \end{matrix}\right\| \sim$$

$$\sim \left\|\begin{matrix} -1, & 1, & -1, & -7 \\ 0, & 1, & 1, & -1 \\ 0, & 0, & 2, & 10 \\ 0, & 0, & -5, & -25 \end{matrix}\right\| \sim \left\|\begin{matrix} 1, & -1, & 1, & -7 \\ 0, & 1, & 1, & -1 \\ 0, & 0, & 1, & 5 \end{matrix}\right\|$$

Provedením zpětného chodu získáme hledané koeficienty lineární kombinace, $\alpha_1 = -4$, $\alpha_2 = -6$, $\alpha_3 = 5$, tzn., že vektor $\boldsymbol{b}$ můžeme vyjádřit takto:

$$\boldsymbol{b} = -4\boldsymbol{a}_1 - 6\boldsymbol{a}_2 + 5\boldsymbol{a}_3.$$

Nakonec uvedeme větu:

Vektory $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ jsou lineárně závislé právě tehdy, je-li aspoň jeden z nich lineární kombinací ostatních.

Podle této věty jsou např. vektory $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}$ z předchozího příkladu lineárně závislé.

Velmi často užíváme zvláštních případů této věty:

1. Je-li mezi vektory $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ aspoň jeden nulový, jsou tyto vektory lineárně závislé.

Nulový vektor je totiž zřejmě lineární kombinací libovolných vektorů.

2. Je-li aspoň jeden z vektorů $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ násobkem jiného, jsou tyto vektory lineárně závislé.

Nechť např. mezi vektory $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ jsou vektory $\boldsymbol{a}_r, \boldsymbol{a}_s$, pro které platí $\boldsymbol{a}_r = k\boldsymbol{a}_s$. Potom můžeme vyjádřit $\boldsymbol{a}_r$ jako lineární kombinaci

$$\boldsymbol{a}_r = 0\boldsymbol{a}_1 + 0\boldsymbol{a}_2 + \ldots + 0\boldsymbol{a}_{r-1} + 0\boldsymbol{a}_{r+1} + \ldots + 0\boldsymbol{a}_{s-1} + k\boldsymbol{a}_s + \\ + 0\boldsymbol{a}_{s+1} + \ldots + 0\boldsymbol{a}_m.$$

3. Jsou-li aspoň dva z vektorů $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ sobě rovny, jsou tyto vektory lineárně závislé.

Matice

V předcházejících kapitolách jsme se seznámili s pojmy matice soustavy a rozšířené matice soustavy. Prvky těchto matic byly koeficienty

a absolutní členy soustav rovnic. Matice však může být sestavena i z čísel získaných zcela jiným způsobem. Např. záznam n laboratorních měření na optické lavici, v němž číslo a udává vzdálenost předmětu a číslo b vzdálenost obrazu od čočky, číslo y výšku zobrazovaného předmětu a číslo y' výšku obrazu, je možno zapsat pomocí matice

$$\left\|\begin{matrix} a_1, & b_1, & y_1, & y'_1 \\ a_2, & b_2, & y_2, & y'_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n, & b_n, & y_n, & y'_n \end{matrix}\right\|,$$

kde v každém řádku jsou zapsány výsledky jednoho měření. Jiné tabulkové záznamy lze napsat ve formě matice, např. jízdní řád. Sami jistě dovedete uvést řadu podobných příkladů.

Vyslovíme nyní definici matice.

Maticí A typu (m, n) nazýváme schéma $m \cdot n$ čísel, sestavených v m řádcích a n sloupcích:

$$\mathbf{A} = \left\|\begin{matrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \ldots, & a_{mn} \end{matrix}\right\|$$

Je-li $m \neq n$, nazývá se matice $\mathbf{A}$ **obdélníková**, je-li $m = n$, nazývá se **čtvercová.** Čtvercovou matici typu (n, n) nazýváme maticí **n-tého stupně.** Názvů **prvky, řádky, sloupce, hlavní diagonála** matice budeme používat ve stejném smyslu jako doposud.

Matice, jejíž všechny prvky jsou nuly, se nazývá **nulová matice.** Platí-li pro dvě matice

$$\mathbf{C} = \left\|\begin{matrix} c_{11}, & c_{12}, & \ldots, & c_{1n} \\ c_{21}, & c_{22}, & \ldots, & c_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{m1}, & c_{m2}, & \ldots, & c_{mn} \end{matrix}\right\|, \quad \mathbf{D} = \left\|\begin{matrix} d_{11}, & d_{12}, & \ldots, & d_{1n} \\ d_{21}, & d_{22}, & \ldots, & d_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ d_{m1}, & d_{m2}, & \ldots, & d_{mn} \end{matrix}\right\|$$

typu (m, n), že se sobě rovnají jejich příslušné prvky, tj. $c_{ij} = d_{ij}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2 \ldots, n$, říkáme, že se obě **matice sobě rovnají** a píšeme $\mathbf{C} = \mathbf{D}$.

K matici

$$A = \left\| \begin{matrix} a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn} \end{matrix} \right\|$$

typu (m, n) můžeme vytvořit tzv. matici **transponovanou**

$$A_T = \left\| \begin{matrix} a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1} \\ a_{12}, a_{22}, \dots, a_{m2} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{mn} \end{matrix} \right\|$$

typu (n, m), která vznikne výměnou řádků za sloupce beze změny jejich pořadí.

Příklad 19. a) K matici typu (2, 5)

$$A = \left\| \begin{matrix} 1, & 2, & 4, & -3, & 2 \\ 3, & 0, & 1, & 0, & -5 \end{matrix} \right\| \text{ je transponovaná matice } \quad A_T = \left\| \begin{matrix} 1, & 3 \\ 2, & 0 \\ 4, & 1 \\ -3, & 0 \\ 2, & -5 \end{matrix} \right\|$$

typu (5,2).

b) K symetrické matici (viz př. 10, str. 40)

$$S = \left\| \begin{matrix} 3, & -1, & 0, & 1 \\ -1, & 4, & 3, & 0 \\ 0, & 3, & -1, & -5 \\ 1, & 0, & -5, & 2 \end{matrix} \right\| \text{ je transponovaná matice } \quad S_T = \left\| \begin{matrix} 3, & -1, & 0, & 1 \\ -1, & 4, & 3, & 0 \\ 0, & 3, & -1, & -5 \\ 1, & 0, & -5, & 2 \end{matrix} \right\|$$

Pro symetrickou matici platí $S = S_T$.

Hodnost matice

Nyní přiřadíme každé matici jisté nezáporné číslo h, k jehož určení použijeme pojmu lineární závislosti vektorů.

Říkáme, že matice

$$A = \left\| \begin{matrix} a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn} \end{matrix} \right\|$$

má **hodnost** h, jestliže obsahuje h lineárně nezávislých řádků, ale každých $h + 1$ řádků této matice tvoří soustavu lineárně závislých vektorů (hodnost matice je tedy maximální počet lineárně nezávislých řádků matice). Hodnost nulové matice je rovna nule.

Příklad 20. Určete hodnost matice

$$\left\| \begin{matrix} -1, & 2, & 5, & 2 \\ -2, & 3, & 6, & 1 \\ 6, & -5, & -2, & 9 \end{matrix} \right\|.$$

Tato matice může mít hodnost nejvýše tři, neboť má tři řádky. Zjistíme, jsou-li její řádky lineárně závislé, tj. budeme hledat čísla $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, aby platilo

$$\alpha_1(-1, 2, 5, 2) + \alpha_2(-2, 3, 6, 1) + \alpha_3(6, -5, -2, 9) = (0, 0, 0, 0),$$

což rozepsáno ve složkách dává homogenní soustavu rovnic

$$\begin{aligned} -\alpha_1 - 2\alpha_2 + 6\alpha_3 &= 0, \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 - 5\alpha_3 &= 0, \\ 5\alpha_1 + 6\alpha_2 - 2\alpha_3 &= 0, \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + 9\alpha_3 &= 0. \end{aligned}$$

Vyřešíme ji eliminační metodou

$$\left\| \begin{matrix} -1, & -2, & 6, & 0 \\ 2, & 3, & -5, & 0 \\ 5, & 6, & -2, & 0 \\ 2, & 1, & 9, & 0 \end{matrix} \right\| \sim \left\| \begin{matrix} -1, & -2, & 6, & 0 \\ 0, & -1, & 7, & 0 \\ 0, & -4, & 28, & 0 \\ 0, & -3, & 21, & 0 \end{matrix} \right\| \sim$$

$$\sim \left\| \begin{matrix} -1, & -2, & 6, & 0 \\ 0, & -1, & 7, & 0 \\ 0, & -1, & 7, & 0 \\ 0, & -1, & 7, & 0 \end{matrix} \right\|.$$

Poslední tři rovnice jsou stejné, proto třetí a čtvrtou rovnici vypustíme a řešíme soustavu:

$$\begin{aligned} -\alpha_1 + 2\alpha_2 + 6\alpha_3 &= 0 \\ -\alpha_2 + 7\alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

Získáme řešení

$$\alpha_1 = -8\alpha,\ \alpha_2 = 7\alpha,\ \alpha_3 = \alpha,$$

kde α je libovolné číslo. Např. $\alpha_1 = -8$, $\alpha_2 = 7$, $\alpha_3 = 1$. Řádky matice jsou tedy lineárně závislé a její hodnost je maximálně $h = 2$. Nyní zjistíme, zda jsou aspoň dva řádky dané matice lineárně nezávislé. Vezměme např. první dva řádky a hledejme taková β_1, β_2, aby platilo $\beta_1(-1, 2, 5, 2) + \beta_2(-2, 3, 6, 1) = (0, 0, 0, 0)$, tj.

$$\begin{aligned} -\beta_1 - 2\beta_2 &= 0, \\ 2\beta_1 + 3\beta_2 &= 0, \\ 5\beta_1 + 6\beta_2 &= 0, \\ 2\beta_1 + \beta_2 &= 0. \end{aligned}$$

Tato soustava má jediné řešení $\beta_1 = \beta_2 = 0$, takže prvé dva řádky jsou lineárně nezávislé, a tedy $h = 2$.

Při určování hodnosti matice používáme často těchto vět:

Hodnost h matice A je rovna hodnosti h_T matice transponované A_T.

Důsledek této věty je:

Hodnost matice typu (m, n) je nejvýše rovna menšímu z čísel m, n, tj. $h \leq \min(m, n)$.

Určovat hodnost matice podle definice (jako v příkladu 20) je velmi pracné. Uvedeme dvě věty, jimiž lze určovat hodnost matice snadněji.

Trojúhelníková matice o h řádcích

$$T = \begin{Vmatrix} t_{11}, & t_{12}, & \dots, & t_{1h}, & \dots, & t_{1n} \\ 0, & t_{22}, & \dots, & t_{2h}, & \dots, & t_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & \dots, & t_{hh}, & \dots, & t_{hn} \end{Vmatrix},$$

kde $t_{ii} \neq 0$ pro $i = 1, 2, \dots, h$, má hodnost h.

Důkaz: Ptejme se, pro která čísla $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_h$ platí

$$\alpha_1 \mathbf{t}_1 + \alpha_2 \mathbf{t}_2 + \dots + \alpha_h \mathbf{t}_h = 0,$$

kde $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \dots, \mathbf{t}_h$ jsou řádky matice $\mathbf{T}$. Rozepsáním ve složkách získáme soustavu n rovnic o h neznámých

$$\begin{aligned} &\alpha_1 t_{11} && && && &&= 0, \\ &\alpha_1 t_{12} &&+ \alpha_2 t_{22} && && &&= 0, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\alpha_1 t_{1h} &&+ \alpha_2 t_{2h} &&+ \dots &&+ \alpha_h t_{hh} &&= 0, \\ &\alpha_1 t_{1,h+1} &&+ \alpha_2 t_{2,h+1} &&+ \dots &&+ \alpha_h t_{h,h+1} &&= 0, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\alpha_1 t_{1n} &&+ \alpha_2 t_{2n} &&+ \dots &&+ \alpha_h t_{hn} &&= 0, \end{aligned}$$

která má jediné řešení $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_h = 0$, takže všechny její řádky jsou lineárně nezávislé. Hodnost matice T je tedy h.

Praktický výpočet hodnosti matice, který spočívá v převedení dané matice na matici trojúhelníkovou se stejnou hodností, je založen na této větě.

Hodnost matice se nezmění, provedeme-li tyto úpravy, které nazýváme elementárními úpravami:

a) **zaměníme pořadí řádků,**

b) **vynásobíme jeden řádek nenulovým číslem,**

c) **přičteme k jednomu řádku lineární kombinaci ostatních řádků,**

d) **vynecháme v matici řádek, který je lineární kombinací ostatních.**

Elementární úpravy můžeme provádět také se sloupci, neboť hodnosti matice A a matice transponované jsou si rovny.

Příklad 21. Určete hodnost matice

$$\begin{Vmatrix} 3, & 5, & -1, & 4 \\ 2, & 0, & 8, & 5 \\ 1, & -5, & 17, & 6 \\ 2, & 3, & 10, & 0 \end{Vmatrix}.$$

Popíšeme jednotlivé elementární úpravy.

1. Třetí řádek zařadíme jako první.
2. První řádek vynásobíme postupně čísly -3, -2, -2 a přičteme po řadě k druhému, třetímu a čtvrtému řádku.
3. Protože druhý řádek je dvojnásobkem třetího, vynecháme jej.
4. Sedminásobek druhého řádku odečteme od desetinásobku třetího.

Značka $\sim$ bude znamenat, že matice vpravo vznikla z matice vlevo elementární úpravou.

$$\begin{Vmatrix} 3, & 5, & -1, & 4 \\ 2, & 0, & 8, & 5 \\ 1, & -5, & 17, & 6 \\ 2, & -3, & 10, & 0 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1, & -5, & 17, & 6 \\ 3, & 5, & -1, & 4 \\ 2, & 0, & 8, & 5 \\ 2, & -3, & 10, & 0 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1, & -5, & 17, & 6 \\ 0, & 20, & -52, & -14 \\ 0, & 10, & -26, & -7 \\ 0, & 7, & -24, & -12 \end{Vmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{Vmatrix} 1, & -5, & 17, & 6 \\ 0, & 10, & -26, & -7 \\ 0, & 7, & -24, & -12 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1, & -5, & 17, & 6 \\ 0, & 70, & -182, & -49 \\ 0, & 0, & 58, & 71 \end{Vmatrix}$$

Výsledná trojúhelníková matice má tři řádky, proto $h = 3$.

Jistě jste si povšimli, že při převádění matice v tomto příkladu na matici trojúhelníkovou jsme používali obdobného postupu i grafického záznamu jako při řešení soustav rovnic Gaussovou metodou v příkladech 7, 8 na str. 30 a 31.

Elementární úpravy a) b) c) provedené s řádky rozšířené matice soustavy jsou totiž vlastně **ekvivalentní úpravy soustavy rovnic.** Záměně dvou rovnic v soustavě odpovídá záměna dvou příslušných řádků v rozšířené matici soustavy, vynásobení obou stran některé rovnice číslem $\alpha \neq 0$ odpovídá vynásobení příslušného řádku rozšířené matice číslem α a přičtení násobku obou stran ostatních rovnic k některé rovnici odpovídá přičtení lineární kombinace ostatních řádků rozšířené matice k příslušnému řádku. Vynechání řádku, který je lineární kombinací ostatních řádků rozšířené matice soustavy, je také ekvivalentní úpravou soustavy. Odůvodníme si to takto: Pomocí elementární úpravy a) uspořádejme rovnice dané soustavy, tedy i řádky rozšířené matice soustavy tak, že první řádek rozšířené matice soustavy je lineární kombinací ostatních. Podle definice lineární kombinace je tedy m-tý řádek součtem $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_m$ násobků následujících řádků. Budeme říkat, že první rovnice je lineární kombinací ostatních. Vynásobíme-li obě strany j-té

rovnice číslem α_j, dostáváme rovnici, kterou splňují všechna řešení j-té rovnice. Lineární kombinaci 2., 3., ..., m-té rovnice, což je tedy první rovnice, vyhovují proto všechna řešení těchto rovnic a můžeme ji vynechat. To však odpovídá vynechání prvého řádku rozšířené matice soustavy. Z těchto úvah vyplývá důležitý závěr:

Provedeme-li s řádky rozšířené matice soustavy libovolnou elementární úpravu, dostaneme rozšířenou matici soustavy ekvivalentní.

Tohoto poznatku využijeme v následujícím příkladu.

Příklad 22. Určete hodnost h matice soustavy a hodnost matice rozšířené z příkladů 5—8 na str. 25—31:

a) Příklad 5 str. 25. Trojúhelníková matice soustavy po provedení přímého chodu je

$$\begin{Vmatrix} 1, & 1, & 1, & 1, & 1 \\ 0, & 2, & 6, & 14, & 30 \\ 0, & 0, & 3, & 28, & 75 \\ 0, & 0, & 0, & 2, & 20 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 5 \end{Vmatrix}.$$

Protože má 5 řádků, je hodnost matice soustavy $h = 5$. Přidáním dalšího sloupce, tvořeného absolutními členy, se hodnost nemůže změnit, je tedy také hodnost rozšířené matice $h' = 5$.

b) V příkladu 6 na str. 28 vyjde také trojúhelníková matice pětiřádková, je tedy opět $h = h' = 5$.

c) V příkladu 7 na str. 30 je $h = h' = 3$.

d) Podrobněji si všimneme příkladu 8 na str. 31. Rozšířená matice výsledné soustavy je

$$\begin{Vmatrix} 2, & -3, & 0, & -1, & 5 \\ 0, & 4, & 1, & 1, & -7 \\ 0, & 0, & 1, & -7, & 33 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 8 \end{Vmatrix}.$$

Vyměníme-li v této matici čtvrtý a pátý sloupec, vznikne trojúhelníková matice, která má čtyři řádky, takže $h' = 4$. Jestliže pátý sloupec vypustíme, vznikne matice soustavy

$$\begin{Vmatrix} 2, & -3, & 0, & -1 \\ 0, & 4, & 1, & 1 \\ 0, & 0, & 1, & -7 \\ 0, & 0, & 0, & 0 \end{Vmatrix},$$

jejíž čtvrtý řádek je nulový, je tedy lineární kombinací předcházejících a můžeme jej vypustit. Vznikne trojřádková trojúhelníková matice

$$\begin{Vmatrix} 2, & -3, & 0, & -1 \\ 0 & 4, & 1, & 1 \\ 0, & 0, & 1, & -7 \end{Vmatrix},$$

takže hodnost matice soustavy je $h = 3$.

Ve všech dalších příkladech, které jsme řešili Gaussovou metodou, je $h = h' = 4$.

CVIČENÍ

31. Do matice $\boldsymbol{A}$ dosaďte za $x_1, x_2, \ldots, x_{11}$ taková čísla, aby vznikla symetrická matice.

$$\boldsymbol{A} = \begin{Vmatrix} -1, & x_1, & -1, & x_2, & 8, & x_3 \\ 0, & 2, & -3, & 2, & x_4, & -7 \\ x_5, & -3, & 0, & x_6, & 4, & 3 \\ -7, & x_7, & 9, & 3, & x_8, & x_9 \\ x_{10}, & -2, & 4, & 11, & 5, & 2 \\ 6, & -7, & x_{11}, & -5, & 2, & 0 \end{Vmatrix}$$

V dalších příkladech určete hodnost matice.

32. $$\begin{Vmatrix} 6, & -4, & 1, & -3, & -3, & -1, & -2 \\ -3, & -5, & -4, & 5, & -2, & -10, & 1 \\ 9, & -13, & -2, & -1, & -8, & -12, & -3 \\ 21, & -35, & -7, & 0, & -21, & -35, & -7 \\ 27, & -11, & 8, & -17, & -10, & 6, & -9 \end{Vmatrix}$$

33. $$\begin{Vmatrix} 8, & 4, & 1, & 7, & 12, & 5, & 12 \\ 4, & 2, & 3, & 1, & 6, & 5, & 6 \\ -2, & -1, & -4, & 2, & -3, & -5, & -3 \\ 6, & 3, & 2, & 4, & 9, & 5, & 9 \\ 2, & 1, & -1, & 3, & 3, & 0, & 3 \end{Vmatrix}$$

34. $$\begin{Vmatrix} 5, & 4, & 3, & 5, & 7, & 2 \\ 1, & 3, & 2, & 1, & -3, & 1 \\ 6, & 7, & 5, & 6, & 4, & 2 \\ 11, & 11, & 8, & 11, & 11, & 5 \\ 10, & 8, & 6, & 10, & 14, & 4 \end{Vmatrix}$$

35. $$\begin{Vmatrix} 1, & 9, & 3, & 5 \\ 2, & 5, & 1, & 2 \\ 1, & 3, & 1, & 1 \\ 2, & 18, & 6, & 10 \\ 2, & 12, & 4, & 6 \\ 3, & 14, & 4, & 7 \end{Vmatrix}$$

36. $$\begin{Vmatrix} 3, & 2, & 1, & 5, & 4 \\ 7, & 1, & 6, & 8, & 13 \\ 4, & -1, & 5, & 3, & 9 \\ 7, & 3, & 4, & 10, & 11 \end{Vmatrix}$$

37. $$\begin{Vmatrix} 3, & 7, & -6, & 4, & 8, & 12 \\ 1, & 4, & 5, & 8, & 16, & -16 \\ 5, & -9, & 4, & 0, & 0, & -36 \\ 7, & 2, & 3, & 12, & 24, & -40 \\ 4, & 3, & -11, & -4, & -8, & 28 \end{Vmatrix}$$

38. $$\begin{Vmatrix} 1, & 0, & 2, & 5, & 4 \\ 3, & -1, & 1, & 0, & -3 \\ 2, & -3, & 0, & 2, & 0 \\ 0, & 2, & -1, & -7, & -7 \\ 5, & -4, & 1, & 2, & -3 \end{Vmatrix}$$

39. $$\begin{Vmatrix} 8, & 4, & 1, & 7, & 12, & 5, & 12 \\ 4, & 2, & 3, & 1, & 6, & 5, & 6 \\ -2, & -1, & -4, & 2, & -3, & -5, & -3 \\ 6, & 3, & 2, & 4, & 9, & 5, & 9 \\ 2, & 1, & -1, & 3, & 3, & 0, & 3 \end{Vmatrix}$$

40. $$\begin{Vmatrix} 3, & 2, & -1, & 2, & 0, & 1 \\ 4, & 1, & 0, & -3, & 0, & 2 \\ 2, & -1, & -2, & 1, & 1, & -3 \\ 3, & 1, & 3, & -9, & -1, & 6 \\ 3, & -1, & -5, & 7, & 2, & -7 \end{Vmatrix}$$

41. $$\begin{Vmatrix} 1, & 2, & 1, & 2, & 1 \\ 2, & 1, & 4, & 3, & 1 \\ 3, & 2, & 1, & 2, & 1 \\ 3, & 1, & 1, & 3, & 1 \\ 1, & 2, & 3, & 1, & 1 \end{Vmatrix}$$

42. $$\begin{Vmatrix} 5, & 2, & 1, & 10, & 6, & 7 \\ 3, & 1, & 1, & 6, & 4, & 4 \\ 9, & 5, & 3, & 18, & 12, & 14 \\ 1, & 2, & 1, & 2, & 2, & 3 \end{Vmatrix}$$

B. ŘEŠITELNOST SOUSTAV

Mezi soustavami, které jsme dosud řešili, se vyskytly také soustavy, které neměly řešení. Byl to příklad 8 na str. 31 a příklad 26d ve cvičení na str. 32. Když jsme v předcházející kapitole zjišťovali hodnosti h matic soustav a hodnosti h' matic rozšířených všech dosud řešených příkladů, zjistili jsme, že pro soustavy, které měly aspoň jedno řešení, platilo $h = h'$, zatímco soustava v příkladu 8 na str. 31, která neměla řešení, měla $h = 3$ a $h' = 4$, čili $h \neq h'$. Řešitelnost soustavy skutečně velmi úzce souvisí s hodnostmi h a h' a tento vztah vyjadřuje obecně **věta Frobeniova,** kterou nyní uvedeme.

Soustava

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{1}$$

má aspoň jedno řešení právě tehdy, je-li hodnost h matice soustavy rovna hodnosti h' matice rozšířené, tj. $h = h'$.

Větu můžeme vyslovit také takto:

Soustava (1) nemá řešení právě tehdy, je-li $h \neq h'$.
Platnost této věty si ukážeme ještě na jednom příkladu.

Příklad 23. Při procvičování jste zjistili, že příklad 26d ve cvičení na str. 32 nemá řešení. Zkoumejme existenci řešení tohoto příkladu pomocí Frobeniovy věty. Abychom zjistili h a h', budeme s rozšířenou maticí soustavy provádět elementární úpravy.

$$\left\| \begin{matrix} 3, & -4, & 1, & -7, & 2 \\ -1, & 1, & -2, & 2, & -2 \\ 2, & 2, & -1, & 3, & 3 \\ 4, & -1, & -2, & -2, & +1 \end{matrix} \right\| \sim \left\| \begin{matrix} -1, & 1, & -2, & 2, & -2 \\ 3, & -4, & 1, & -7, & 2 \\ 2, & 2, & -1, & 3, & 3 \\ 4, & -1, & -2, & -2, & 1 \end{matrix} \right\| \sim$$

$$\sim \left\| \begin{matrix} -1, & 1, & -2, & 2, & -2 \\ 0, & -1, & -5, & -1, & -4 \\ 0, & 4, & -5, & 7, & -1 \\ 0, & 3, & -10, & 6, & -7 \end{matrix} \right\| \sim \left\| \begin{matrix} -1, & 1, & -2, & 2, & -2 \\ 0, & -1, & -5, & -1, & -4 \\ 0, & 0, & -25, & 3, & -17 \\ 0, & 0, & -25, & 3, & -19 \end{matrix} \right\| \sim$$

$$\sim \left\| \begin{matrix} -1, & 1, & -2, & 2, & -2 \\ 0, & -1, & -5, & -1, & -4 \\ 0, & 0, & -25, & 3, & -17 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & -2 \end{matrix} \right\|$$

Vynecháme-li poslední sloupec, který je tvořen absolutními členy, dostaneme matici, jejíž poslední řádek je nulový vektor, a můžeme jej vynechat. Vznikne trojřádková trojúhelníková matice, která má hodnost stejnou jako matice soustavy.
Je tedy $h = 3$. Ještě určíme hodnost matice rozšířené. Provedeme ještě jednu elementární úpravu, a to záměnu dvou posledních sloupců.

$$\left\| \begin{matrix} -1, & 1, & -2, & 2, & -2 \\ 0, & -1, & -5, & -1, & -4 \\ 0, & 0, & -25, & 3, & -17 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & -2 \end{matrix} \right\| \sim \left\| \begin{matrix} -1, & 1, & -2, & -2, & 2 \\ 0, & -1, & -5, & -4, & -1 \\ 0, & 0, & -25, & -17, & 3 \\ 0, & 0, & 0, & -2, & 0 \end{matrix} \right\|$$

Vznikla čtyřřádková trojúhelníková matice, takže $h' = 4$. Protože $h \neq h'$, nemá podle Frobeniovy věty soustava řešení.

Podle Frobeniovy věty dovedeme rozhodnout, má-li soustava řešení. Některé soustavy, s kterými jsme se dosud setkali, měly právě jedno řešení a některé nekonečně mnoho řešení. O počtu řešení můžeme rozhodnout pomocí dalších dvou vět.

Soustava (1) m **lineárních rovnic o** n **neznámých má právě jedno řešení právě tehdy, je-li $h = h' = n$, kde h je hodnost matice soustavy, h' hodnost matice rozšířené a n počet neznámých.**

Z této věty vyplývá, že jediné řešení může mít pouze soustava, v níž je počet rovnic větší nebo roven počtu neznámých.

Větu nebudeme obecně dokazovat, ale její platnost opět ukážeme na příkladu.

Příklad 24. Rozhodněte o existenci řešení soustavy a má-li řešení, určete je:

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 3x_4 &= 9 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= -1 \\ x_1 + 7x_2 - 2x_3 \phantom{{}-3x_4} &= 15 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 4x_4 &= -2 \\ -x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 9x_4 &= 11 \\ 2x_1 - 5x_2 - 2x_3 + x_4 &= 6 \end{aligned}$$

Abychom určili h a h', převedeme pomocí elementárních úprav rozšířenou matici soustavy na matici trojúhelníkovou. Úpravy budeme provádět pouze s řádky, abychom nezaměnili pořadí neznámých a mohli výsledné trojúhelníkové matice použít přímo k určení neznámých.

$$\begin{Vmatrix} -1, & 2, & -4, & -3, & 9 \\ 1, & 1, & 2, & 2, & -1 \\ 1, & 7, & -2, & 0, & 15 \\ 1, & 3, & 1, & -4, & -2 \\ -1, & -2, & -2, & 9, & 11 \\ 2, & -5, & -2, & 1, & 6 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} -1, & 2, & -4, & -3, & 9 \\ 0, & 3, & -2, & -1, & 8 \\ 0, & 9, & -6, & -3, & 24 \\ 0, & 5, & -3, & -7, & 7 \\ 0, & -4, & 2, & 12, & 2 \\ 0, & -1, & -10, & -5, & 24 \end{Vmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{Vmatrix} -1, & 2, & -4, & -3, & 9 \\ 0, & 3, & -2, & -1, & 8 \\ 0, & 0, & 1, & -16, & -19 \\ 0, & 0, & 1, & -16, & -19 \\ 0, & 0, & -2, & -1, & 5 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} -1, & 2, & -4, & -3, & 9 \\ 0, & 3, & -2, & -1, & 8 \\ 0, & 0, & 1, & -16, & -19 \\ 0, & 0, & 0, & 1, & 1 \end{Vmatrix}$$

Rozšířená trojúhelníková matice má čtyři řádky, proto je hodnost matice rozšířené $h' = 4$. Vypuštěním posledního sloupce dostáváme trojúhelníkovou matici soustavy, která má rovněž čtyři řádky, takže i $h = 4$. Počet neznámých v soustavě je $n = 4$, je tedy $h = h' = n = 4$, takže soustava má právě jedno řešení. Výsledná rozšířená trojúhelníková matice náleží soustavě

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 3x_4 &= 9, \\ 3x_2 - 2x_3 - x_4 &= 8, \\ x_3 - 16x_4 &= -19, \\ x_4 &= 1, \end{aligned}$$

jejímž řešením je vektor $x = (2, 1, -3, 1)$.

V příkladu 7 na str. 30 byl počet neznámých $n = 4$, ale hodnost matice soustavy a hodnost matice rozšířené byla $h = h' = 3$, tj. $h = h' < n$. Viděli jsme, že tato soustava měla nekonečně mnoho řešení. Tento vztah platí obecně a vyjádříme jej následující větou, která je důsledkem obou předcházejících vět.

Soustava (1) m lineárních rovnic o n neznámých má nekonečně mnoho řešení právě tehdy, je-li hodnost matice soustavy rovna hodnosti matice rozšířené a je-li menší než počet neznámých, čili $h = h' < n$. V tomto případě můžeme $n - h$ neznámých libovolně volit.

Větu budeme opět ilustrovat příkladem.

Příklad 25. Řešte soustavu (o existenci a počtu řešení rozhodněte porovnáním h, h' a n):

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 0 \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 &= -1 \\ 2x_1 + 12x_2 + 4x_3 + 5x_4 &= 3 \\ x_1 - 5x_2 - 2x_3 + 4x_4 &= 4 \\ x_1 + 7x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \end{aligned}$$

Pomocí elementárních úprav rozšířené matice soustavy určíme hodnost h matice soustavy a hodnost matice rozšířené a současně tím převedeme soustavu na ekvivalentní soustavu s trojúhelníkovou maticí.

$$\begin{Vmatrix} 1, & 3, & 2, & 4, & 0 \\ 1, & 5, & 3, & 4, & 1 \\ 1, & 1, & 1, & 4, & -1 \\ 2, & 12, & 4, & 5, & 3 \\ 1, & -5, & -2, & 4, & 4 \\ 1, & 7, & 1, & 1, & 2 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1, & 3, & 2, & 4, & 0 \\ 0, & 2, & 1, & 0, & 1 \\ 0, & -2, & -1, & 0, & -1 \\ 0, & 6, & 0, & -3, & 3 \\ 0, & -8, & -4, & 0, & 4 \\ 0, & 4, & -1, & -3, & 2 \end{Vmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{Vmatrix} 1, & 3, & 2, & 4, & 0 \\ 0, & 2, & 1, & 0, & 1 \\ 0, & 0, & -3, & -3, & 0 \\ 0, & 0, & -3, & -3, & 0 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1, & 3, & 2, & 4, & 0 \\ 0, & 2, & 1, & 0, & 1 \\ 0, & 0, & 1, & 1, & 0 \end{Vmatrix}$$

Výsledná trojúhelníková matice má tři řádky a vynecháme-li poslední sloupec absolutních členů, vznikne opět trojúhelníková matice se třemi řádky. Je tedy $h = h' = 3$. Počet neznámých je však $n = 4$, čili $h = h' < n$. Soustava má tedy nekonečně mnoho řešení. V poslední matici jsou koeficienty ekvivalentní soustavy

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 0 \\ 2x_2 + x_3 &= 1 \\ x_3 + x_4 &= 0\,. \end{aligned}$$

Volíme-li za x_4 libovolné číslo α a dosadíme-li do předcházejících rovnic, získáme řešení

$$x_1 = \frac{-3 - 7\alpha}{2}, \; x_2 = \frac{1 + \alpha}{2}, \; x_3 = -\alpha, \; x_4 = \alpha.$$

Nakonec si ještě všimneme soustavy **homogenní**.

Homogenní soustava

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= 0\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= 0\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &\\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= 0
\end{aligned} \qquad (2)$$

má vždy aspoň nulové (tzv. triviální) řešení $x_1 = 0,\ x_2 = 0, \ldots$ $\ldots, x_n = 0$, o čemž se snadno přesvědčíme dosazením.

Nutná a postačující podmínka pro to, aby homogenní soustava (2) **měla nenulové řešení, je, aby** $h < n$. V tomto případě tedy platí $h = h' < n$, takže soustava má nekonečně mnoho nenulových řešení.

Příklad 26. Řešte soustavu

$$\begin{aligned}
2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 8x_4 &= 0\\
3x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 5x_4 &= 0\\
x_1 - 10x_2 + 10x_3 - 11x_4 &= 0\\
-4x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 9x_4 &= 0\\
9x_1 - x_2 - x_3 - 4x_4 &= 0.
\end{aligned}$$

Určíme hodnost matice soustavy.

$$\left\|\begin{matrix} 2, & -3, & 4, & -8\\ 3, & 4, & -2, & -5\\ 1, & -10, & 10, & -11\\ -4, & 2, & 3, & -9\\ 9, & -1, & -1, & -4 \end{matrix}\right\| \sim \left\|\begin{matrix} 2, & -3, & 4, & -8\\ 0, & 17, & -16, & 14\\ 0, & 17, & -16, & 14\\ 0, & -4, & 11, & -25\\ 0, & -25, & 38, & -64 \end{matrix}\right\| \sim$$

$$\sim \left\|\begin{matrix} 2, & -3, & 4, & -8\\ 0, & 17, & -16, & 14\\ 0, & -4, & 11, & -25\\ 0, & -25, & 38, & -64 \end{matrix}\right\| \sim$$

$$\sim \left\|\begin{matrix} 2, & -3, & 4, & -8\\ 0, & 17, & -16, & 14\\ 0, & 0, & 123, & -369\\ 0, & 0, & 246, & -738 \end{matrix}\right\| \sim \left\|\begin{matrix} 2, & -3, & 4, & -8\\ 0, & 17, & -16, & 14\\ 0, & 0, & 1, & -3 \end{matrix}\right\|$$

$$h = 3$$

Doplníme-li trojúhelníkovou matici o sloupec absolutních členů, tj.

nulami, zjistíme, že $h' = 3$. Je tedy $h = h' < n$. Soustava má nekonečně mnoho řešení, která určíme provedením zpětného chodu v soustavě

$$\begin{aligned}
2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 8x_4 &= 0\\
17x_2 - 16x_3 + 14x_4 &= 0\\
x_3 - 3x_4 &= 0.
\end{aligned}$$

Za x_4 můžeme volit libovolné číslo α a po provedení zpětného chodu dostaneme

$$x_1 = \alpha,\quad x_2 = 2\alpha,\quad x_3 = 3\alpha,\quad x_4 = \alpha,$$

např. (1, 2, 3, 1), nebo (−2, −4, −6, −2), nebo (0, 0, 0, 0) atd.

CVIČENÍ

Řešte soustavy lineárních rovnic (o existenci a počtu řešení rozhodněte porovnáním čísel h, h', n):

43.
$$\begin{aligned}
5x_1 + x_2 - x_3 &= 0\\
3x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= -10\\
-x_1 - 7x_2 + 2x_3 &= 8\\
2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 10\\
-4x_1 - 11x_2 + 5x_3 &= 30\\
2x_1 - 3x_2 &= -2
\end{aligned}$$

44.
$$\begin{aligned}
5x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 4x_4 - 4x_5 &= 0\\
6x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 3x_4 - 4x_5 &= -5\\
4x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 5x_4 - 4x_5 &= 8\\
7x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 4x_5 &= -10\\
11x_1 + 7x_2 - 6x_3 + 7x_4 - 8x_5 &= -5
\end{aligned}$$

45.
$$\begin{aligned}
3x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 - 2x_5 &= -3\\
9x_2 + 5x_3 + 3x_4 - 2x_5 &= 6\\
2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + x_5 &= 3\\
-2x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 2x_4 - 3x_5 &= 3\\
6x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 2x_4 - 2x_5 &= 0\\
4x_1 + 3x_2 + 9x_3 - 4x_4 - 5x_5 &= 3\\
5x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 2x_5 &= -1\\
-7x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 - x_5 &= 4
\end{aligned}$$

46.
$$\begin{aligned}
3x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 &= 0\\
2x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 &= 0\\
5x_1 - x_2 - x_3 - 6x_4 &= 0
\end{aligned}$$

47.
$$\begin{aligned}
3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 &= 0\\
5x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 &= 1\\
6x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 8x_4 &= 0\\
12x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 5x_4 &= 3\\
7x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 2
\end{aligned}$$

48.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 6 \\ 7x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ 12x_1 + 9x_2 + 6x_3 &= 22 \end{aligned}$$

49.

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= -1 \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &= 4 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 &= 5 \\ 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= -2 \\ -4x_1 - x_2 + x_3 &= -5 \end{aligned}$$

50.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 &= 10 \\ 7x_1 + 5x_2 + 4x_4 - 7x_5 &= 28 \\ 4x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 2x_4 - 4x_5 &= 18 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 3x_5 &= 8 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 - 5x_5 &= 18 \end{aligned}$$

51. Pomocí h a h' rozhodněte o existenci řešení soustav z cvičení na str. 22 a 32.

3. ŘEŠENÍ SOUSTAV POMOCÍ DETERMINANTŮ

A. DETERMINANT DRUHÉHO A TŘETÍHO STUPNĚ

Determinant druhého stupně

Řešme soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned} \tag{1}$$

sčítací metodou.

Obě strany první rovnice vynásobíme číslem a_{22}, obě strany druhé rovnice vynásobíme číslem $(-a_{12})$, příslušné strany obou rovnic sečteme a na levé straně vytkneme x_1. Tím jsme vyloučili neznámou x_2. Obdobným způsobem vyloučíme x_1 a dostáváme dvě rovnice, z nichž každá má jen jednu neznámou

$$\begin{aligned} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\, x_1 &= b_1a_{22} - a_{12}b_2 \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\, x_2 &= a_{11}b_2 - b_1a_{21}. \end{aligned}$$

Tyto rovnice můžeme psát ve tvaru

$$Ax_1 = A_1, \; Ax_2 = A_2. \tag{2}$$

Čísla $A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, $A_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2$, $A_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}$ **budeme nazývat determinanty čtvercových matic**

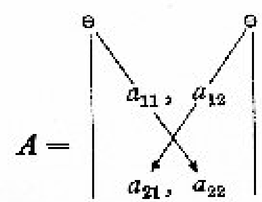
$$\mathbf{A} = \left\| \begin{matrix} a_{11}, a_{12} \\ a_{21}, a_{22} \end{matrix} \right\| \qquad \mathbf{A}_1 = \left\| \begin{matrix} b_1, a_{12} \\ b_2, a_{22} \end{matrix} \right\| \qquad \mathbf{A}_2 = \left\| \begin{matrix} a_{11}, b_1 \\ a_{21}, b_2 \end{matrix} \right\|$$

a budeme je symbolicky značit

$$A = \left| \begin{matrix} a_{11}, a_{12} \\ a_{21}, a_{22} \end{matrix} \right| \qquad A_1 = \left| \begin{matrix} b_1, a_{12} \\ b_2, a_{22} \end{matrix} \right| \qquad A_2 = \left| \begin{matrix} a_{11}, b_1 \\ a_{21}, b_2 \end{matrix} \right|.$$

Protože determinant A matice $\mathbf{A}$ je determinant matice soustavy (1), budeme jej nazývat **determinant soustavy** (1). Všimneme si, že matice $\mathbf{A}_1$ vznikne z matice soustavy tak, že první sloupec matice soustavy nahradíme vektorem absolutních členů soustavy. Obdobně vznikne matice $\mathbf{A}_2$ nahrazením druhého sloupce vektorem absolutních členů.

Výpočet determinantu matice druhého stupně můžeme schematicky naznačit takto



$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Přesto, že determinant matice je číslo, bývá zvykem používat u determinantu názvů prvky, řádky, sloupce a hlavní diagonála determinantu.

Je-li $A \neq 0$, má soustava (1) jediné řešení, které vyjádříme podle (2) tzv. **Cramerovým pravidlem.**

$$x_1 = \frac{A_1}{A}, \; x_2 = \frac{A_2}{A}.$$

Příklad 27. Řešte soustavu

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 &= 1, \\ 9x_1 - 11x_2 &= 29. \end{aligned}$$

Determinant soustavy je roven

$$A = \left| \begin{matrix} a_{11}, a_{12} \\ a_{21}, a_{22} \end{matrix} \right| = \left| \begin{matrix} 3, & 5 \\ 9, & -11 \end{matrix} \right| = -33 - 45 = -78.$$

Jelikož $A \neq 0$, má soustava jediné řešení, které určíme pomocí Cramerova pravidla. Vypočítáme determinanty A_1, A_2.

$$A_1 = \begin{vmatrix} b_1, a_{12} \\ b_2, a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & 5 \\ 29, & -11 \end{vmatrix} = -156, \quad A_2 = \begin{vmatrix} a_{11}, b_1 \\ a_{21}, b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3, & 1 \\ 9, & 29 \end{vmatrix} = 78.$$

$$x_1 = \frac{A_1}{A} = \frac{156}{78} = 2, \; x_2 = \frac{A_2}{A} = \frac{78}{-78} = -1,$$

$$x_1 = 2, \; x_2 = -1.$$

Zkouška: $L_1 = 3 \,.\, 2 + 5(-1) = 1, \quad P_1 = 1, \quad L_1 = P_1,$
$L_2 = 9 \,.\, 2 - 11(-1) = 29, \quad P_2 = 29, \quad L_2 = P_2.$

Determinant třetího stupně

Nyní budeme řešit soustavu tří lineárních rovnic o třech neznámých

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3. \end{aligned} \tag{3}$$

Rovnice uspořádáme tak, aby $a_{13} \neq 0$. Obě strany první rovnice vynásobíme číslem $-\frac{a_{23}}{a_{13}}$ a přičteme k příslušným stranám druhé rovnice. Potom obě strany první rovnice vynásobíme číslem $-a_{33}$, obě strany třetí rovnice vynásobíme číslem a_{13} a příslušné strany sečteme. Tím jsme vyloučili neznámou x_3 z druhé a třetí rovnice a získali jsme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých

$$\left(a_{21} - \frac{a_{23}}{a_{13}} a_{11}\right) x_1 - \left(a_{22} - \frac{a_{23}}{a_{13}} a_{12}\right) x_2 = b_2 - \frac{a_{23}}{a_{13}} b_1$$

$$(a_{31}a_{13} - a_{11}a_{33})\, x_1 - (a_{32}a_{13} - a_{12}a_{33})\, x_2 = b_3a_{13} - b_1a_{33}.$$

Podle (2) platí pro neznámé x_1 a x_2 vztahy

$$Ax_1 = A_1, \; Ax_2 = A_2,$$

kde determinant soustavy je

$$A = \begin{vmatrix} a_{21} - \frac{a_{23}}{a_{13}} a_{11}, & a_{22} - \frac{a_{23}}{a_{13}} a_{12} \\ a_{31}a_{13} - a_{11}a_{33}, & a_{32}a_{13} - a_{12}a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \left(a_{21} - \frac{a_{23}}{a_{13}} a_{11}\right) (a_{32}a_{13} - a_{12}a_{33}) - \left(a_{22} - \frac{a_{23}}{a_{13}} a_{12}\right) (a_{31}a_{13} - a_{11}a_{33}).$$

Po roznásobení a úpravě dostaneme

$$A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}.$$

Dále vyjádříme determinanty A_1 a A_2.

$$A_1 = \begin{vmatrix} b_2 - \frac{a_{23}}{a_{13}} b_1, & a_{22} - \frac{a_{23}}{a_{13}} a_{12} \\ b_3a_{13} - b_1a_{33}, & a_{32}a_{13} - a_{12}a_{33} \end{vmatrix}$$

a po úpravě

$$A_1 = b_1a_{22}a_{33} + b_2a_{32}a_{13} + b_3a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}b_3 - a_{23}a_{32}b_1 - a_{33}a_{12}b_2.$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} a_{21} - \frac{a_{23}}{a_{13}} a_{11}, & b_2 - \frac{a_{23}}{a_{13}} b_1 \\ a_{31}a_{13} - a_{11}a_{33}, & b_3a_{13} - b_1a_{33} \end{vmatrix}$$

a po úpravě

$$A_2 = a_{11}b_2a_{33} + a_{21}b_3a_{13} + a_{31}b_1a_{23} - a_{13}b_2a_{31} - a_{23}b_3a_{11} - a_{33}b_1a_{21}.$$

Jako cvičení si podobným způsobem dokažte, že i pro neznámou x_3 platí rovnice

$$Ax_3 = A_3,$$

kde

$$A_3 = a_{11}a_{22}b_3 + a_{21}a_{32}b_1 + a_{31}a_{12}b_2 - b_1a_{22}a_{31} - b_2a_{32}a_{11} - b_3a_{12}a_{21}.$$

Soustavu tří rovnic o třech neznámých (3) **můžeme tedy vyjádřit rovnicemi**

$$Ax_1 = A_1, \; Ax_2 = A_2, \; Ax_3 = A_3. \tag{4}$$

Čísla

$$\begin{aligned} A &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}, \\ A_1 &= b_1a_{22}a_{33} + b_2a_{32}a_{13} + b_3a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}b_3 - a_{23}a_{32}b_1 - a_{33}a_{12}b_2, \\ A_2 &= a_{11}b_2a_{33} + a_{21}b_3a_{13} + a_{31}b_1a_{23} - a_{13}b_2a_{31} - a_{23}b_3a_{11} - a_{33}b_1a_{21}, \\ A_3 &= a_{11}a_{22}b_3 + a_{21}a_{32}b_1 + a_{31}a_{12}b_2 - b_1a_{22}a_{31} - b_2a_{32}a_{11} - b_3a_{12}a_{21} \end{aligned}$$

jsou tzv. determinanty čtvercových matic

$$\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} a_{11}, a_{12}, a_{13} \\ a_{21}, a_{22}, a_{23} \\ a_{31}, a_{32}, a_{33} \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{A}_1 = \begin{Vmatrix} b_1, a_{12}, a_{13} \\ b_2, a_{22}, a_{23} \\ b_3, a_{32}, a_{33} \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{Vmatrix} a_{11}, b_1, a_{13} \\ a_{21}, b_2, a_{23} \\ a_{31}, b_3, a_{33} \end{Vmatrix},$$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{Vmatrix} a_{11}, a_{12}, b_1 \\ a_{21}, a_{22}, b_2 \\ a_{31}, a_{32}, b_3 \end{Vmatrix}$$

a budeme je symbolicky značit

$$A = \begin{vmatrix} a_{11}, a_{12}, a_{13} \\ a_{21}, a_{22}, a_{23} \\ a_{31}, a_{32}, a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_1 = \begin{vmatrix} b_1, a_{12}, a_{13} \\ b_2, a_{22}, a_{23} \\ b_3, a_{32}, a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_2 = \begin{vmatrix} a_{11}, b_1, a_{13} \\ a_{21}, b_2, a_{23} \\ a_{31}, b_3, a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} a_{11}, a_{12}, b_1 \\ a_{21}, a_{22}, b_2 \\ a_{31}, a_{32}, b_3 \end{vmatrix}.$$

Determinant A matice soustavy **A** budeme opět nazývat **determinant soustavy.** I zde si všimneme, že matice $\boldsymbol{A}_1$ vznikne z matice soustavy nahrazením prvního sloupce vektorem absolutních členů soustavy. Podobně matice $\boldsymbol{A}_2$ vznikne nahrazením druhého sloupce a matice $\boldsymbol{A}_3$ nahrazením třetího sloupce.

Výpočet determinantu třetího stupně můžeme schematicky naznačit pomocí tzv. **Sarrusova pravidla.** Napíšeme determinant A a pod něj připíšeme jeho první dva řádky:

$$A = \begin{array}{c|ccc|c} \oplus & & & & \ominus \\ \oplus & a_{11}, & a_{12}, & a_{13} & \ominus \\ \oplus & a_{21}, & a_{22}, & a_{23} & \ominus \\ & a_{31}, & a_{32}, & a_{33} & \\ \multicolumn{1}{c}{} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \multicolumn{1}{c}{} \\ \multicolumn{1}{c}{} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \multicolumn{1}{c}{} \end{array} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}\, a_{23} - {} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}$$

Také u determinantu matice třetího stupně budeme používat názvů **prvky, řádky, sloupce** a **hlavní diagonála,** podobně jako u matice třetího stupně, ke které determinant přísluší.

Pomocí determinantů můžeme diskutovat i řešitelnost soustavy dvou rovnic o dvou neznámých a tří rovnic o třech neznámých.

a) **Je-li $A = 0$, $A_1 = 0$, $A_2 = 0$, $A_3 = 0$, je každá z rovnic**

$$Ax_1 = A_1, \ Ax_2 = A_2, \ Ax_3 = A_3$$

splněna pro libovolná x_1, x_2, x_3. Soustava má nekonečně mnoho řešení.

b) **Je-li $A = 0$ a aspoň jedno z čísel A_1, A_2, A_3 různé od nuly, nemá soustava řešení, neboť neexistuje číslo x_j, aby platilo** $0 \,.\, x_j = A_j$, je-li $A_j \neq 0$ $(j = 1, 2, 3)$.

c) **Je-li $A \neq 0$, má soustava jediné řešení, které vyjádříme pomocí Cramerova pravidla**

$$x_1 = \frac{A_1}{A}, \ x_2 = \frac{A_2}{A}, \ x_3 = \frac{A_3}{A}.$$

Příklad 28. Řešte soustavu

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 13 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 32 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 5. \end{aligned}$$

Nejdříve vypočítáme determinant soustavy

$$A = \begin{array}{|ccc|} 2, & -1, & 2 \\ 3, & 2, & 1 \\ 1, & 1, & -1 \\ \multicolumn{1}{c}{2,} & -1, & \multicolumn{1}{c}{2} \\ \multicolumn{1}{c}{3,} & 2, & \multicolumn{1}{c}{1} \end{array} = 2 \,.\, 2 \,.\, (-1) + 3 \,.\, 1 \,.\, 2 + 1 \,.\, (-1) \,.\, 1 - 2 \,.\, 2 \,.\, {} . \, 1 - 1 \,.\, 1 \,.\, 2 - (-1) \,.\, (-1) \,.\, 3 = -8 \,.$$

Jelikož $A \neq 0$, má soustava jediné řešení, které vyjádříme pomocí Cramerova pravidla. Vypočítáme determinanty A_1, A_2, A_3.

$$A_1 = \begin{vmatrix} 13, & -1, & 2 \\ 32, & 2, & 1 \\ 5, & 1, & -1 \end{vmatrix} = -26 + 64 - 5 - 20 - 32 - 13 = -32$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} 2, & 13, & 2 \\ 3, & 32, & 1 \\ 1, & 5, & -1 \end{vmatrix} = -64 + 30 + 13 - 64 + 39 - 10 = -56$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} 2, & -1, & 13 \\ 3, & 2, & 32 \\ 1, & 1, & 5 \end{vmatrix} = 20 + 39 - 32 - 26 + 15 - 64 = -48$$

$$x_1 = \frac{A_1}{A} = \frac{-32}{-8} = 4,\ x_2 = \frac{A_2}{A} = \frac{-56}{-8} = 7,\ x_3 = \frac{-48}{-8} = 6,$$

$$x_1 = 4,\ x_2 = 7,\ x_3 = 6.$$

Zkouška: $L_1 = 8 - 7 + 12 = 13,\quad P_1 = 13,\quad L_1 = P_1,$
$L_2 = 12 + 14 + 6 = 32,\quad P_2 = 32,\quad L_2 = P_2,$
$L_3 = 4 + 7 - 6 = 5,\quad P_3 = 5,\quad L_3 = P_3.$

Příklad 29. Určete a, pro které nemá soustava řešení:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 13 \\ ax_1 + 3x_2 + 2x_3 &= -7 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 &= -3 \end{aligned}$$

Určíme a, pro které platí

$$A = \begin{vmatrix} 1, & 2, & 2 \\ a, & 3, & 2 \\ 2, & 1, & 4 \end{vmatrix} = 12 + 8 + 2a - 12 - 8a - 2 = 6 - 6a = 0,$$

$$a = 1.$$

Vypočítáme ještě A_1.

$$A_1 = \begin{vmatrix} 13, & 2, & 2 \\ -7, & 3, & 2 \\ -3, & 1, & 4 \end{vmatrix} = 156 - 12 - 14 + 18 + 56 - 26 = 134.$$

A_2 a A_3 již nemusíme počítat, neboť $A_1 \neq 0$. Soustava tedy nemá řešení pro $a = 1$.

CVIČENÍ

52. Pomocí determinantů vyřešte všechny soustavy ze cvičení na str. 22.

53. Pomocí determinantů řešte soustavy:

a) $\begin{aligned} 7x_1 - 2x_2 &= 3 \\ x_1 + 5x_2 &= 4 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 &= 3 \\ 4x_1 - 2x_2 &= 1 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 3x_1 - x_2 &= 7 \\ 6x_1 - 2x_2 &= 3 \end{aligned}$ d) $\begin{aligned} 17x_1 + 3x_2 &= 11 \\ -20x_1 + 7x_2 &= 13 \end{aligned}$

54. a) $\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 &= 2 \\ 3x_1 - x_2 + 7x_3 &= -3 \\ -x_1 + 3x_2 - 5x_3 &= 4 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 &= 2 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} x_1 - 9x_2 + 7x_3 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 &= -2 \\ 3x_1 + x_2 - 6x_3 &= 5 \end{aligned}$ d) $\begin{aligned} 13x_1 - x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 10x_1 + 5x_2 + 18x_3 &= 3 \\ x_1 - 2x_2 - 5x_3 &= 7 \end{aligned}$

55. Pomocí determinantů určete a, pro které nemá soustava řešení:

a) $\begin{aligned} ax_1 - x_2 &= 4 \\ 2x_1 + 4x_2 &= 1 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} ax_1 + 3x_2 &= 2 \\ x_1 - 2x_2 &= 1 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ ax_1 - x_2 + 4x_3 &= 2 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 4 \end{aligned}$ d) $\begin{aligned} x_1 + ax_2 - x_3 &= 3 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 &= 2 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$

56. Pomocí determinantů určete a, b taková, aby soustava měla nekonečně mnoho řešení:

a) $\begin{aligned} x_1 + ax_2 - 3x_3 &= b \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 &= 7 \\ -x_1 + 5x_2 - 3x_3 &= 19 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \\ ax_1 + x_2 + 2x_3 &= b \\ 6x_1 + 7x_2 - x_3 &= 7 \end{aligned}$

B. DETERMINANT n-TÉHO STUPNĚ

Definice determinantu n-tého stupně

Abychom mohli definovat determinant matice n-tého stupně, seznámíme se nejdříve s pojmem **permutace.**

Permutací n prvků $a_1, a_2, \ldots, a_n$ rozumíme každou uspořádanou n-tici těchto prvků. To znamená, že tvoření permutací prvků $a_1, a_2, \ldots, a_n$ spočívá v zaměňování pořadí (permutování) **těchto prvků.**

Počet permutací jednoho prvku a_1 je $P_1 = 1$. Přidáme-li další prvek, počet permutací se zdvojnásobí, neboť přidaný prvek může být buď na druhém (a_1, a_2), nebo na prvém místě (a_2, a_1), tedy $P_2 = 1 \,.\, 2$.

Přidáme-li třetí prvek, můžeme jej v každé permutaci prvků a_1, a_2 umístit na třetí místo (a_1, a_2, a_3), (a_2, a_1, a_3), na druhé místo (a_1, a_3, a_2), (a_2, a_3, a_1) nebo na prvé místo (a_3, a_1, a_2), (a_3, a_2, a_1). Počet permutací se ztrojnásobí, tedy $P_3 = 1 \,.\, 2 \,.\, 3$. Obdobně zjistíme, že $P_4 = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4$, $P_5 = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5$ atd.

Podobně bychom mohli pokračovat dále a došli bychom k závěru:

Počet všech různých permutací n prvků je

$$P_n = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots (n-1) \,.\, n = n!$$

Symbol $n!$ se čte n faktoriál a pro $n = 0$ definujeme $0! = 1$.

Nás budou zajímat především permutace přirozených čísel $1, 2, \ldots, n$. Např. všechny permutace čísel 1, 2, 3, 4 jsou: (1, 2, 3, 4), (2, 1, 3, 4), (3, 2, 1, 4), (4, 2, 3, 1), (1, 3, 2, 4), (1, 4, 3, 2), (1, 2, 4, 3), (2, 3, 1, 4), (2, 4, 3, 1), (2, 1, 4, 3), (3, 1, 2, 4), (3, 4, 1, 2), (3, 2, 4, 1), (4, 3, 2, 1), (4, 1, 3, 2), (4, 2, 1, 3), (1, 3, 4, 2), (1, 4, 2, 3), (2, 3, 4, 1), (2, 4, 1, 3), (3, 1, 4, 2), (3, 4, 2, 1), (4, 3, 1, 2), (4, 1, 2, 3). Je to celkem $4! = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 = 24$ permutací.

Nyní se ještě seznámíme s pojmem **inverze.** Nechť n-tice přirozených čísel $j_1, j_2, \ldots, j_n$ je nějaká permutace přirozených čísel $1, 2, \ldots, n$. Říkáme, že čísla j_i, j_k v této permutaci, kde $i < k$ $(1 \leqq i \leqq n,\ 1 \leqq k \leqq n)$, tvoří **inverzi,** je-li $j_i > j_k$, tj. stojí-li větší číslo před menším. Má-li permutace $j_1, j_2, \ldots, j_n$ lichý počet inverzí, nazývá se **lichá,** má-li sudý počet inverzí, nazývá se **sudá.** Např. permutace:

a) 2, 4, 1, 3, v níž $j_1 = 2, j_2 = 4, j_3 = 1, j_4 = 3$, má tři inverze (2, 1), tj. $j_1 > j_3$, (4, 1), tj. $j_2 > j_3$, (4, 3), tj. $j_2 > j_4$, je tedy lichá.

b) 4, 2, 1, 3 má čtyři inverze (4, 2), (4, 1), (4, 3), (2, 1), je tedy sudá.

c) 1, 2, 3, 4 má 0 inverzí, je tedy sudá.

Pomocí pojmů permutace a inverze si nyní rozebereme definici determinantu matice třetího stupně.

$$A = \begin{vmatrix} a_{11}, a_{12}, a_{13} \\ a_{21}, a_{22}, a_{23} \\ a_{31}, a_{32}, a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Prvky v jednotlivých součinech jsou seřazeny tak, aby uspořádání prvních indexů bylo vzestupné, tzn., že jsou seřazeny podle řádků, z kterých jsou vybrány. Při tomto uspořádání vidíme, že druhé indexy vystřídají postupně všechny permutace (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1), (2, 1, 3), (1, 3, 2). První permutace je sudá, neboť má 0 inverzí, druhá je také sudá, neboť má dvě inverze (2, 1) a (3, 1) a třetí je také sudá, neboť má dvě inverze (3, 1) a (3, 2). Znaménka prvých tří součinů jsou kladná. Další permutace jsou liché, neboť čtvrtá má tři inverze (3, 2), (3, 1), (2, 1), pátá jednu inverzi (2, 1) a šestá jednu inverzi (3, 2). Znaménka čtvrtého, pátého a šestého součinu jsou záporná. Z těchto skutečností vyplývá:

Je-li permutace sudá, má součin znaménko kladné, je-li permutace lichá, má součin znaménko záporné.

Pomocí počtu inverzí v permutacích sloupcových indexů můžeme determinant třetího stupně zapsat

$$A = (-1)^0 a_{11}a_{22}a_{33} + (-1)^2 a_{12}a_{23}a_{31} + (-1)^2 a_{13}a_{21}a_{32} + (-1)^3 a_{13}a_{22}a_{31} + (-1)^1 a_{12}a_{21}a_{33} + (-1)^1 a_{11}a_{23}a_{32}$$

a determinant druhého stupně

$$A = \begin{vmatrix} a_{11}, a_{12} \\ a_{21}, a_{22} \end{vmatrix} = \underbrace{a_{11}a_{22}}_{0\ \text{inverzí}} - \underbrace{a_{12}a_{21}}_{1\ \text{inverze}} = (-1)^0 a_{11}a_{22} + (-1)^1 a_{12}a_{21}.$$

Podobně budeme definovat determinant matice n-tého stupně.

Determinant matice n-tého stupně

$$\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{nn} \end{Vmatrix}$$

je číslo A určené předpisem

$$A = a_{11}a_{22}a_{33} \ldots a_{nn} - a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}a_{55}a_{66} \ldots a_{nn} + a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}a_{56}a_{65} \ldots a_{nn} - a_{11}a_{22}a_{34}a_{45}a_{53}a_{66}a_{77} \ldots a_{nn} +$$

+ další součiny prvků matice $\mathbf{A}$ o n činitelích, v nichž první (řádkové) indexy jsou uspořádány vzestupně a druhé (sloupcové) indexy vystřídají postupně všechny permutace přiroze-

ných čísel $1, 2, \ldots, n$; je-li permutace sloupcových indexů sudá, je znaménko součinu kladné, je-li lichá, je záporné. Tyto součiny nazýváme členy determinantu. Determinant A značíme

$$A = \begin{vmatrix} a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Poznámka

1. Definici determinantu n-tého stupně můžeme stručně zapsat

$$A = \sum (-1)^r a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n},$$

kde $j_1, j_2, \ldots, j_n$ jsou prvky permutace čísel $1, \ldots, n$ a r udává počet inverzí v permutaci $j_1, j_2, \ldots, j_n$. Je-li r sudé, je $(-1)^r = 1$ a znaménko je tedy $+$, je-li liché, je $(-1)^r = -1$ a znaménko je $-$. Sčítáme přes všechny permutace přirozených čísel $1, 2, \ldots, n$.

2. Všimněte si, že v každém členu determinantu se vyskytuje právě jeden prvek z každého řádku a každého sloupce matice. Nemůže tedy být členem determinantu např. $a_{11}a_{22}a_{32}a_{43}a_{45} \ldots$, neboť obsahuje dva prvky z druhého sloupce a dva ze čtvrtého řádku.

3. Názvů **prvky, řádky, sloupce** a **hlavní diagonála** determinantu budeme používat podobně jako u matic.

4. Determinant n-tého stupně má $n!$ členů, neboť počet permutací čísel $1, 2, \ldots, n$ je $n!$. V tabulce XI si ukážeme počet členů determinantů druhého až desátého stupně.

Tabulka XI

Stupeň determinantu n	Počet členů determinantu $n!$
2	2
3	6
4	24
5	120
6	720
7	5 040
8	40 320
9	362 880
10	3 628 800

Z tabulky XI je vidět, že výpočet determinantu podle definice je velmi zdlouhavý. Seznámíme se s metodami, při jejichž použití se výpočet determinantu značně zjednoduší.

Pokusme se nejdříve vyjádřit determinant třetího stupně pomocí determinantů druhého stupně. Determinant třetího stupně je

$$A = \begin{vmatrix} a_{11}, a_{12}, a_{13} \\ a_{21}, a_{22}, a_{23} \\ a_{31}, a_{32}, a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - $$
$$- a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}.$$

Členy determinantu A uspořádáme tak, že nejdříve napíšeme členy obsahující prvek a_{11}, potom členy s prvkem a_{12} a nakonec členy s prvkem a_{13}. Prvky a_{11}, a_{12}, a_{13} vytkneme:

$$A = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) +$$
$$+ a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

Vidíme, že výrazy v závorkách jsou determinanty druhého stupně. Můžeme tedy determinant třetího stupně vyjádřit pomocí tří determinantů druhého stupně násobených prvky prvního řádu. Tomuto vyjádření determinantů třetího stupně, tj.

$$A = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22}, a_{23} \\ a_{32}, a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21}, a_{23} \\ a_{31}, a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21}, a_{22} \\ a_{31}, a_{32} \end{vmatrix},$$

říkáme **rozvoj determinantu** A podle prvního řádku.

Všimněme si jednotlivých determinantů druhého stupně, které označíme

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22}, a_{23} \\ a_{32}, a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{12} = \begin{vmatrix} a_{21}, a_{23} \\ a_{31}, a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} a_{21}, a_{22} \\ a_{31}, a_{32} \end{vmatrix}.$$

Vidíme, že determinant A_{11} můžeme vytvořit z determinantu A vynecháním prvního řádku a prvního sloupce. Podobně můžeme vytvořit A_{12} vynecháním prvního řádku a druhého sloupce a A_{13} vynecháním prvního řádku a třetího sloupce v determinantu A. Rozvoj podle prvního řádku můžeme potom zapsat

$$A = a_{11}A_{11} - a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}.$$

Sami jistě dovedete obdobným způsobem odvodit rozvoj podle

2. řádku $A = -a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} - a_{23}A_{23}$,
3. řádku $A = a_{31}A_{31} - a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}$,
1. sloupce $A = a_{11}A_{11} - a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$,
2. sloupce $A = -a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} - a_{32}A_{32}$,
3. sloupce. $A = a_{13}A_{13} - a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}$.

Ve všech případech zjistíte, že determinanty druhého stupně $A_{ij}(i, j = 1, 2, 3)$ lze vytvořit z determinantu A vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce.

Determinant druhého stupně A_{ij}, který vznikne z determinantu třetího stupně A vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce, budeme nazývat **subdeterminant** determinantu A příslušný prvku a_{ij}.

Všimněme si ještě znamének u jednotlivých členů rozvoje. Kladná znaménka jsou u takových členů $a_{ij}A_{ij}$, kde $i + j$ je sudé číslo, takže $(-1)^{i+j} = 1$. Záporná znaménka jsou u takových členů $a_{ij}A_{ij}$, kde $i + j$ je liché číslo, takže $(-1)^{i+j} = -1$.

Rozvoj determinantu třetího stupně podle i-tého řádku pak zapíšeme následujícím způsobem:

$$A = (-1)^{i+1}a_{i1}A_{i1} + (-1)^{i+2}a_{i2}A_{i2} + (-1)^{i+3}a_{i3}A_{i3}$$

a rozvoj podle j-tého sloupce

$$A = (-1)^{1+j}a_{1j}A_{1j} + (-1)^{2+j}a_{2j}A_{2j} + (-1)^{3+j}a_{3j}A_{3j}.$$

Označíme-li $A'_{ij} = (-1)^{i+j}A_{ij}$, můžeme rozvoj podle i-tého řádku také zapsat

$$A = a_{i1}A'_{i1} + a_{i2}A'_{i2} + a_{i3}A'_{i3}$$

a podle j-tého sloupce

$$A = a_{1j}A'_{1j} + a_{2j}A'_{2j} + a_{3j}A'_{3j}.$$

Čísla $A'_{ij} = (-1)^{i+j}A_{ij}$ jsou tzv. doplňky prvku a_{ij} v determinantu A.

Příklad 30. Rozvineme determinant

$$A = \begin{vmatrix} -2, & 3, & 1 \\ 7, & 2, & 3 \\ 3, & 1, & 5 \end{vmatrix}$$

podle druhého sloupce a vypočítáme jeho hodnotu.

$$A = -3\begin{vmatrix} 7, & 3 \\ 3, & 5 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -2, & 1 \\ 3, & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -2, & 1 \\ 7, & 3 \end{vmatrix} = -3 . 26 + 2(-13) - -(-13) = -91$$

Správnost výsledku ověřte pomocí Sarrusova pravidla.

Zcela obdobně jako pro determinant třetího stupně budeme definovat subdeterminant a doplněk pro determinant n-tého stupně.

a) **Subdeterminant** A_{ij} determinantu A příslušný prvku a_{ij} $(1 \leq i, j \leq n)$ je determinant stupně $n - 1$, který vznikne z determinantu n-tého stupně vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce, tj.

$$A_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \dots, & a_{1,j-1}, & a_{1,j+1}, & \dots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \dots, & a_{2,j-1}, & a_{2,j+1}, & \dots, & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1,1}, & a_{i-1,2}, & \dots, & a_{i-1,j-1}, & a_{i-1,j+1}, & \dots, & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1}, & a_{i+1,2}, & \dots, & a_{i+1,j-1}, & a_{i+1,j+1}, & \dots, & a_{i+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \dots, & a_{n,j-1}, & a_{n,j+1}, & \dots, & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Příklad 31. Určete subdeterminanty determinantu

$$A = \begin{vmatrix} 3, & -1, & 2, & 3 \\ 2, & 2, & 6, & 2 \\ 5, & 3, & 3, & -1 \\ 4, & -4, & 1, & 7 \end{vmatrix}$$

příslušné prvkům $a_{31} = 5$, $a_{32} = 3$, $a_{33} = 3$, $a_{34} = -1$.

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -1, & 2, & 3 \\ 2, & 6, & 2 \\ -4, & 1, & 7 \end{vmatrix} = -6 \qquad A_{32} = \begin{vmatrix} 3, & 2, & 3 \\ 2, & 6, & 2 \\ 4, & 1, & 7 \end{vmatrix} = 42$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 3, & -1, & 3 \\ 2, & 2, & 2 \\ 4, & -4, & 7 \end{vmatrix} = 24 \qquad A_{34} = \begin{vmatrix} 3, & -1, & 2 \\ 2, & 2, & 6 \\ 4, & -4, & 1 \end{vmatrix} = 24$$

b) **Doplněk** A'_{ij} prvku a_{ij} v determinantu A je subdeterminant A_{ij} opatřený znaménkem tak, že $A'_{ij} = (-1)^{i+j}A_{ij}$.

Příklad 32. Určete doplňky k prvkům a_{31}, a_{32}, a_{33}, a_{34} v determinantu A z příkladu 31.

$A'_{31} = (-1)^{3+1}A_{31} + A_{31} = -6$, $A'_{32} = -A_{32} = -42$, $A'_{33} = 24$, $A'_{34} = -24$.

Lze dokázat, že i determinant n-tého stupně je možné rozvést podobně, jako determinant třetího stupně, podle řádku nebo sloupce.

a) **Rozvoj determinantu podle i-tého řádku** spočívá v tom, že determinant vyjádříme jako součet

$$A = a_{i1}A'_{i1} + a_{i2}A'_{i2} + \ldots + a_{in}A'_{in} = (-1)^{i+1}a_{i1}A_{i1} + (-1)^{i+2}a_{i2}A_{i2} + \ldots + (-1)^{i+n}a_{in}A_{in},$$

kde $A'_{i1}, A'_{i2}, \ldots, A'_{in}$ jsou doplňky k prvkům $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$ a $A_{i1}, A_{i2}, \ldots, A_{in}$ jsou příslušné subdeterminanty.

b) **Rozvoj podle j-tého sloupce** je dán součtem

$$A = a_{1j}A'_{1j} + a_{2j}A'_{2j} + \ldots + a_{nj}A'_{nj} = (-1)^{1+j}a_{1j}A_{1j} + (-1)^{2+j}a_{2j}A_{2j} + \ldots + (-1)^{n+j}a_{nj}A_{nj}.$$

Příklad 33. Rozvedeme determinant A z příkladu 31 podle třetího řádku a určíme jeho hodnotu.

Použijeme-li výsledků příkladu 32, můžeme psát

$$A = a_{31}A'_{31} + a_{32}A'_{32} + a_{33}A'_{33} + a_{34}A'_{34} = 5 \,.\, (-6) + 3 \,.\, (-42) + 3 \,.\, (24) + (-1) \,.\, (-24) = -60.$$

Další vlastnosti determinantů

Dříve než determinant rozvedeme, upravíme jej obvykle pomocí následujících vět, které uvedeme bez důkazů.

a) **Determinant matice A je roven determinantu matice transponované A_T**

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots, & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{21}, & \ldots, & a_{n1} \\ a_{12}, & a_{22}, & \ldots, & a_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n}, & a_{2n}, & \ldots, & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Pro determinant druhého a třetího stupně větu snadno dokážeme tak, že vypočítáme determinant matice A a matice transponované a výsledky porovnáme. Význam věty je především v tom, že všechny věty, které platí pro řádky, platí také pro sloupce. Další věty budeme formulovat pouze pro řádky.

b) **Vyměníme-li mezi sebou dva řádky determinantu, změní se jeho znaménko.**

Pro determinant druhého a třetího stupně můžeme i tuto vlastnost snadno ověřit výpočtem

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{12}, & a_{11}, & a_{13} \\ a_{22}, & a_{21}, & a_{23} \\ a_{32}, & a_{31}, & a_{33} \end{vmatrix} = \ldots \text{ atd.}, \quad \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{12}, & a_{11} \\ a_{22}, & a_{21} \end{vmatrix} = \text{ atd.}$$

a porovnáme výsledky.

Všimneme si, že při lichém počtu výměn se znaménko determinantu změní a při sudém počtu se nezmění.

c) **Determinant vynásobíme číslem, vynásobíme-li tímto číslem jeden jeho řádek** (tzn., že z kteréhokoli řádku můžeme vytknout společného dělitele před znak determinantu).

Příklad 34. Dokažte vlastnost c) pro determinant třetího stupně. Důkaz provedeme např. pro druhý sloupec

$$c \,.\, \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix} = c(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}) = a_{11}(ca_{22})\, a_{33} + a_{21}(ca_{32})\, a_{13} + a_{31}(ca_{12})\, a_{23} - a_{13}(ca_{22})\, a_{31} - a_{23}(ca_{32})\, a_{11} - a_{33}(ca_{12})\, a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11}, & ca_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & ca_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & ca_{32}, & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Podobně proveďte důkaz pro determinant druhého stupně.

Vlastnosti c) se často používá ke zjednodušení výpočtu.

Příklad 35. Pomocí Cramerova pravidla řešte soustavu

$$\begin{aligned} 6x_1 - 8x_2 + 33x_3 &= 11 \\ 4x_1 + 8x_2 - 11x_3 &= 1 \\ 10x_1 - 16x_2 + 55x_3 &= 13. \end{aligned}$$

Nejdříve vypočítáme determinant soustavy. Protože jeho sloupce mají společné činitele, vytkneme z prvního sloupce číslo 2, z druhého 8 a z třetího 11.

$$A = \begin{vmatrix} 6, & -8, & 33 \\ 4, & 8, & -11 \\ 10, & -16, & 55 \end{vmatrix} = 2 \,.\, 8 \,.\, 11 \begin{vmatrix} 3, & -1, & 3 \\ 2, & 1, & -1 \\ 5, & -2, & 5 \end{vmatrix} = -2^4 \,.\, 3 \,.\, 11$$

Podobně určíme determinanty A_1, A_2, A_3.

$$A_1 = 2^4 \,.\, 3 \,.\, 11, \; A_2 = -2^5 \,.\, 3 \,.\, 11, \; A_3 = -2^4 \,.\, 3 \,.\, 11.$$

Řešení soustavy je $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$.
Proveďte zkoušku.

Nyní vyslovíme tzv. **součtové pravidlo.**

d) **Součet dvou determinantů, které se liší jen v jednom řádku, je roven determinantu, který má všechny řádky stejné jako oba determinanty, kromě řádku, v němž se tyto determinanty liší. Tento řádek je ve výsledném determinantu roven součtu obou odlišných řádků.**

$$\begin{vmatrix} b_{11}, & b_{12}, & \ldots, & b_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots, & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_{11}, & c_{12}, & \ldots, & c_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots, & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} b_{11} + c_{11}, & b_{12} + c_{12}, & \ldots, & b_{1n} + c_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots, & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Platnost součtového pravidla můžeme snadno dokázat pro determinanty druhého a třetího stupně tak, že levou i pravou stranu vypočítáme a porovnáme výsledky.

Příklad 36. Vypočítejte $A + B$, je-li

$$A = \begin{vmatrix} 113, & 21, & 95 \\ 29, & -37, & -128 \\ -58, & 74, & 23 \end{vmatrix}, \qquad B = \begin{vmatrix} 128, & -94, & -23 \\ -37, & 21, & 74 \\ 29, & 113, & -58 \end{vmatrix}.$$

Determinant B si nejdříve upravíme tak, že zaměníme 1. a 3. řádek a potom 1. a 2. sloupec. Provedli jsme sudý počet výměn, proto se znaménko nezmění. Potom determinant zaměníme determinantem transponované matice (tím se jeho hodnota rovněž nezmění). Součet nyní vypočítáme podle součtového pravidla, neboť oba determinanty se liší pouze ve třetím sloupci

$$A + B = \begin{vmatrix} 113, & 21, & 95 \\ 29, & -37, & -128 \\ -58, & 74, & 23 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 113, & 21, & -94 \\ 29, & -37, & 128 \\ -58, & 74, & -23 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 113, & 21, & 1 \\ 29, & -37, & 0 \\ -58, & 74, & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 29, & -37 \\ -58, & 74 \end{vmatrix} = 0.$$

e) **Je-li jeden řádek determinantu lineární kombinací ostatních, je determinant roven nule.**

Podle této věty je roven nule také determinant, který obsahuje aspoň jeden nulový řádek, nebo determinant, v němž aspoň jeden řádek je násobkem jiného (popřípadě obsahuje dva stejné řádky).

f) **Hodnota determinantu se nezmění, přičteme-li k jednomu jeho řádku lineární kombinaci ostatních.**

Při úpravách determinantu se většinou používá zvláštního případu věty:

Hodnota determinantu se nezmění, přičteme-li k některému řádku libovolný násobek jiného řádku.

Obvyklý postup při výpočtu můžeme shrnout do těchto bodů:

1. Pomocí vět b) a f) upravíme determinant tak, aby jeho prvky byly co nejmenší a aby jeden jeho řádek (sloupec) obsahoval $n - 1$ nul.

2. Podle tohoto řádku (sloupce) determinant rozvedeme, a tím snížíme stupeň na $n - 1$.

3. Tímto způsobem pokračujeme tak dlouho, až dojdeme k determinantu 3., popř. 2. stupně, který vypočítáme.

Příklad 37. Vypočítejte determinant

$$A = \begin{vmatrix} -9, & 9, & 3, & 18, & -8, & 8, & 6 \\ 9, & 0, & -1, & -9, & 9, & -17, & 6 \\ -45, & 6, & 2, & 1, & -6, & 8, & 6 \\ -10, & 5, & 5, & 19, & -24, & 32, & 0 \\ 17, & -19, & -3, & 15, & -7, & 12, & -30 \\ -3, & 1, & 1, & 0, & -3, & 1, & 3 \\ -19, & 6, & 7, & 3, & -23, & 11, & 18 \end{vmatrix}.$$

Jednotlivé kroky výpočtu označíme čísly nad rovnítky, abychom je mohli nakonec vysvětlit. Značkou $\boxed{}$ označíme v determinantu ty řádky a sloupce, které při rozvoji podle řádku nebo sloupce, v němž je $n-1$ nul, vypadnou.

$$A \overset{1.}{=} \begin{vmatrix} 0, & 6, & 3, & 18, & 1, & 5, & -3 \\ 6, & 1, & -1, & -9, & 6, & -16, & 9 \\ -39, & 4, & 2, & 1, & 0, & 6, & 0 \\ 5, & 0, & 5, & 19, & -9, & 27, & -15 \\ 8, & -16, & -3, & 15, & -16, & 15, & -21 \\ 0, & 0, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 2, & -1, & 7, & 3, & -2, & 4, & -3 \end{vmatrix} \overset{2.}{=} -\begin{vmatrix} 0, & 6, & 18, & 1, & 5, & -3 \\ 6, & 1, & -9, & 6, & -16, & 9 \\ -39, & 4, & 1, & 0, & 6, & 0 \\ 5, & 0, & 19, & -9, & 27, & -15 \\ 8, & -16, & 15, & -16, & 15, & -21 \\ 2, & -1, & 3, & -2, & 4, & -3 \end{vmatrix} \overset{3.}{=}$$

$$\overset{3.}{=} -3\begin{vmatrix} 0, & 6, & 18, & 1, & 5, & -1 \\ 6, & 1, & -9, & 6, & -16, & 3 \\ -39, & 4, & 1, & 0, & 6, & 0 \\ 5, & 0, & 19, & -9, & 27, & -5 \\ 8, & -16, & 15, & -16, & 15, & -7 \\ 2, & -1, & 3, & -2, & 4, & -1 \end{vmatrix} \overset{4.}{=} -3\begin{vmatrix} -2, & 7, & 15, & 3, & 1, & 0 \\ 12, & -2, & 0, & 0, & -4, & 0 \\ -39, & 4, & 1, & 0, & 6, & 0 \\ -5, & 5, & 4, & 1, & 7, & 0 \\ -6, & -9, & -6, & -2, & -13, & 0 \\ 2, & -1, & 3, & -2, & 4, & -1 \end{vmatrix} \overset{5.}{=}$$

$$\overset{5.}{=} 3\begin{vmatrix} -2, & 7, & 15, & 3, & 1 \\ 12, & -2, & 0, & 0, & -4 \\ -39, & 4, & 1, & 0, & 6 \\ -5, & 5, & 4, & 1, & 7 \\ -6, & -9, & -6, & -2, & -13 \end{vmatrix} \overset{6.}{=} 3\begin{vmatrix} 40, & 7, & 15, & 3, & -13 \\ 0, & -2, & 0, & 0, & 0 \\ -15, & 4, & 1, & 0, & -2 \\ 25, & 5, & 4, & 1, & -3 \\ -60, & -9, & -6, & -2, & 5 \end{vmatrix} \overset{7.}{=}$$

$$\overset{7.}{=} -6\begin{vmatrix} 40, & 15, & 3, & -13 \\ -15, & 1, & 0, & -2 \\ 25, & 4, & 1, & -3 \\ -60, & -6, & -2, & 5 \end{vmatrix} \overset{8.}{=} -30\begin{vmatrix} 8, & 15, & 3, & -13 \\ -3, & 1, & 0, & -2 \\ 5, & 4, & 1, & -3 \\ -12, & -6, & -2, & 5 \end{vmatrix} \overset{9.}{=}$$

$$\overset{9.}{=} -30\begin{vmatrix} -7, & 3, & 0, & 4 \\ -3, & 1, & 0, & -2 \\ 5, & 4, & 1, & -3 \\ -2, & 2, & 0, & -1 \end{vmatrix} \overset{10.}{=} -30\begin{vmatrix} -7, & 3, & -4 \\ -3, & 1, & -2 \\ -2, & 2, & -1 \end{vmatrix} \overset{11.}{=} -30\begin{vmatrix} 2, & 3, & 2 \\ 0, & 1, & 0 \\ 4, & 2, & 3 \end{vmatrix} \overset{12.}{=}$$

$$\overset{12.}{=} -30\begin{vmatrix} 2, & 2 \\ 4, & 3 \end{vmatrix} = 60$$

Postup výpočtu:

1. K 1., 2., 4., 5., 6., 7. sloupci jsme přičetli vhodný násobek 3. sloupce tak, aby v 6. řádku byly samé nuly až na $a_{63} = 1$.
2. Rozvedli jsme podle 6. řádku, čímž se snížil stupeň na 6.
3. Ze 6. sloupce jsme vytkli 3.
4. K 1., 2., 3., 4., 5. řádku jsme přičetli vhodné násobky 6. řádku.
5. Rozvedli jsme podle 6. sloupce.
6. K 1., 3., 4., 5. sloupci jsme přičetli vhodný násobek druhého sloupce.
7. Rozvedli jsme podle 2. řádku.
8. Z prvního sloupce jsme vytkli 5.
9. K 1., 2., 4. řádku jsme přičetli vhodné násobky třetího řádku.
10. Rozvedli jsme podle 3. sloupce.
11. K 1. a 3. sloupci jsme přičetli vhodný násobek druhého sloupce.
12. Rozvedli jsme podle 2. řádku a vypočítali hodnotu determinantu.

Příklad 38. Určíme hodnotu tzv. **Vandermondova determinantu.**

$$V_n = \begin{vmatrix} 1, & x_1, & x_1^2, & \dots, & x_1^{n-1} \\ 1, & x_2, & x_2^2, & \dots, & x_2^{n-1} \\ 1, & x_3, & x_3^2, & \dots, & x_3^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1, & x_n, & x_n^2, & \dots, & x_n^{n-1} \end{vmatrix}, \quad x_1 \neq 0,\ x_2 \neq 0, \dots, x_n \neq 0$$

Determinant nejdříve upravíme tak, že od každého sloupce odečteme předcházející, násobený x_n, rozvedeme podle n-tého sloupce a z každého řádku vytkneme $x_i - x_n$ (i je řádkový index).

$$V_n = \begin{vmatrix} 1, & (x_1 - x_n), & x_1(x_1 - x_n), & x_1^2(x_1 - x_n), & \dots, & x_1^{n-2}(x_1 - x_n) \\ 1, & (x_2 - x_n), & x_2(x_2 - x_n), & x_2^2(x_2 - x_n), & \dots, & x_2^{n-2}(x_2 - x_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1, & (x_{n-1} - x_n), & x_{n-1}(x_{n-1} - x_n), & x_{n-1}^2(x_{n-1} - x_n), & \dots, & x_{n-1}^{n-2}(x_{n-1} - x_n) \\ 1, & 0, & 0, & 0, & \dots, & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{n+1}(x_1 - x_n)(x_2 - x_n)\dots(x_{n-1} - x_n) \begin{vmatrix} 1, & x_1, & x_1^2, & \dots, & x_1^{n-2} \\ 1, & x_2, & x_2^2, & \dots, & x_2^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1, & x_{n-1}, & x_{n-1}^2, & \dots, & x_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix}$$

Vyměníme-li pořadí členů v jednotlivých činitelích $x_i - x_n$, tj. budeme psát $x_n - x_i$, změní se jejich znaménka. Jelikož činitelů je $n - 1$, bude v součinu znaménkových změn také $n - 1$, takže znaménko před součinem určíme $(-1)^{n-1}$. Výsledné znaménko pak bude kladné, neboť

$$(-1)^{n+1} \cdot (-1)^{n-1} = (-1)^{2n} = 1.$$

Determinant, který po této úpravě vznikl, je opět Vandermondův determinant, který je možno z determinantu V_n vytvořit vynecháním posledního řádku a posledního sloupce. Jelikož je stupně $n - 1$, označíme jej V_{n-1} a můžeme napsat rekurentní vztah mezi V_n a V_{n-1}.

$$V_n = (x_n - x_1)(x_n - x_2)\dots(x_n - x_{n-1})\,V_{n-1}$$

Jestliže pomocí tohoto rekurentního předpisu vyjádříme

$$V_{n-1}, V_{n-2}, \dots, V_2, \text{ můžeme psát}$$

$$V_n = (x_n - x_1)(x_n - x_2)\dots(x_n - x_{n-1})(x_{n-1} - x_1)(x_{n-1} - x_2)\dots$$
$$\dots(x_{n-1} - x_{n-2})(x_{n-2} - x_1)(x_{n-2} - x_2)\dots(x_{n-2} - x_{n-3})(x_{n-3} - x_1)$$
$$\dots(x_{n-3} - x_{n-4})\dots(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_2 - x_1).$$

Vandermondův determinant se dá tedy vyjádřit jako součin dvojčlenů, které jsou tvořeny rozdíly všech čísel $x_1, x_2, \dots, x_n$. Protože součin je nulový právě tehdy, je-li aspoň jeden činitel nulový, můžeme vyslovit tento závěr:

Vandermondův determinant je různý od nuly právě tehdy, jsou-li všechna čísla $x_1, x_2, \dots, x_n$ navzájem různá.

CVIČENÍ

57. Pomocí výsledku příkladu 38 vypočítejte determinant matice soustavy z příkladů 25 a—e na str. 32.

58. Vypočítejte determinanty:

a) $\begin{vmatrix} 1, & -2, & 3, & -4 \\ -4, & 3, & -5, & 1 \\ 1, & -1, & 1, & -1 \\ 20, & -21, & 22, & -18 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 3, & 2, & -1, & 4 \\ 5, & 6, & 2, & 8 \\ 2, & 4, & 1, & 1 \\ 1, & 2, & -3, & -2 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 0, & x, & y, & z \\ x, & 0, & z, & y \\ y, & z, & 0, & x \\ z, & y, & x, & 0 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 3, & 13, & 17, & 4 \\ 6, & 28, & 33, & 8 \\ 10, & 40, & 54, & 13 \\ 8, & 37, & 46, & 11 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 1 + a, & 1, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & 1 + b, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & 1, & 1 + c, & 1, & 1 \\ 1, & 1, & 1, & 1 + d & 1 \\ 1, & 1, & 1, & 1, & 1 \end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix} 1, & 6, & 2, & 4, & 4 \\ 3, & 1, & 0, & 3, & -1 \\ 0, & -1, & 1, & -1, & 0 \\ -1, & 2, & -1, & 2, & 3 \\ -2, & 4, & 2, & 0, & 2 \end{vmatrix}$ g) $\begin{vmatrix} 5, & 5, & 4, & -6, & 2 \\ 6, & 0, & -2, & 1, & 7 \\ 2, & 0, & -1, & 0, & 3 \\ 4, & 3, & 0, & 1, & 0 \\ 1, & 2, & 0, & -3, & 1 \end{vmatrix}$

h) $\begin{vmatrix} 5, & -1, & 3, & 0, & 7 \\ -2, & 0, & 2, & 0, & 0 \\ 1, & 7, & 0, & 5, & 13 \\ 3, & 2, & 1, & -3, & 3 \\ 3, & -1, & 0, & -2, & 1 \end{vmatrix}$ i) $\begin{vmatrix} 2, & 1, & -1, & 1, & -3 \\ -3, & -3, & 3, & -3, & 2 \\ 1, & 8, & -5, & 0, & -2 \\ 0, & -7, & 3, & -2, & 3 \\ 0, & -1, & 0, & -4, & 1 \end{vmatrix}$

59. Vypočítejte determinanty V_2, V_3, V_4, V_5 z příkladu 38 na str. 95, je-li $x_1 = 2,\ x_2 = 4,\ x_3 = 5,\ x_4 = 7,\ x_5 = 8$.

60. Pomocí součtového pravidla vypočítejte $A + B$, je-li

a) $A = \begin{vmatrix} -6\,281, & 240, & 320 \\ 9\,876, & -2\,392, & 3\,861 \\ -237, & 15, & 20 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 3\,861, & 320, & 20 \\ -2\,392, & 240, & 15 \\ -9\,875, & 6\,281, & 237 \end{vmatrix};$

b) $A = \begin{vmatrix} 7\,639, & -265, & 27 \\ 4\,900, & 4\,931, & 100 \\ 3\,700, & 3\,263, & 100 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 100, & 100, & -27 \\ 4\,900, & 3\,700, & -7\,639 \\ 4\,931, & 3\,263, & 266 \end{vmatrix}.$

61. Řešte pomocí determinantů:

a) $$\begin{aligned} 61x_1 - 159x_2 &= -294 \\ 183x_1 - 53x_2 &= 390 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 7x_1 - x_2 + 13x_3 &= 2 \\ 14x_1 + 3x_2 - 26x_3 &= 5 \\ 21x_1 - 4x_2 + 39x_3 &= 5 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} 6x_1 - 14x_2 + 15x_3 &= 26 \\ 12x_1 - 7x_2 + 25x_3 &= -13 \\ 24x_1 + 7x_2 + 45x_3 &= -39 \end{aligned}$$

C. UŽITÍ DETERMINANTŮ K ŘEŠENÍ SOUSTAV n ROVNIC O n NEZNÁMÝCH

Na str. 76—81 jsme dokázali, že pro řešení soustavy dvou rovnic o dvou neznámých a tří rovnic o třech neznámých platí vztahy $Ax_1 = A_1$, $Ax_2 = A_2$ a pro soustavu tří rovnic o třech neznámých ještě $Ax_3 = A_3$, kde A je **determinant** soustavy a A_1, A_2, A_3 jsou determinanty, které vzniknou z determinantu soustavy nahrazením prvního, druhého nebo třetího sloupce sloupcem absolutních členů.

Podobné vztahy platí i pro soustavu n lineárních rovnic o n neznámých

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n. \end{aligned} \tag{1}$$

Pro každé řešení $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ **soustavy (1) platí**

$$Ax_j = A_j,\ j = 1, 2, \dots, n,$$

kde A je determinant matice soustavy

$$A = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \dots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \dots, & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \dots, & a_{nn} \end{vmatrix},$$

který budeme opět nazývat **determinant soustavy** a determinanty A_j vzniknou z determinantu soustavy nahrazením j-tého sloupce vektorem absolutních členů.

Z hlediska řešitelnosti soustavy mohou pak nastat tyto případy:

a) **Je-li $A = 0$ a $A_j = 0$ pro každé j, je každá z rovnic**

$$Ax_j = A_j$$

splněna pro každé x_j. Soustava má nekonečně mnoho řešení.

b) **Je-li $A = 0$ a aspoň jedno z čísel A_j různé od nuly, nemá soustava řešení,** neboť neexistuje číslo x_j, aby platilo

$$0 \,.\, x_j = A_j, \qquad \text{kde } A_j \neq 0.$$

c) **Je-li $A \neq 0$, má soustava jediné řešení, které vyjádříme pomocí Cramerova pravidla**

$$x_j = \frac{A_j}{A}.$$

Příklad 39. Pomocí Cramerova pravidla řešte soustavu

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - 2x_3 - x_4 &= -2, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= -5, \\ 5x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 10, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 1. \end{aligned}$$

$$A = \begin{vmatrix} 1, & -2, & -2, & -1 \\ 4, & 2, & 1, & 2 \\ 5, & 1, & 1, & -1 \\ 1, & -1, & 2, & 2 \end{vmatrix} = 107 \qquad A_1 = \begin{vmatrix} -2, & -2, & -2, & -1 \\ -5, & 2, & 1, & 2 \\ 10, & 1, & 1, & -1 \\ 1, & -1, & 2, & 2 \end{vmatrix} = 42$$

$$A_3 = 471$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} 1, & -2, & -2, & -1 \\ 4, & -5, & 1, & 2 \\ 5, & 10, & 1, & -1 \\ 1, & 1, & 2, & 2 \end{vmatrix} = -99 \qquad A_4 = \begin{vmatrix} 1, & -2, & -2, & -1 \\ 4, & 2, & -5, & 2 \\ 5, & 1, & 10, & -1 \\ 1, & -1, & 1, & 2 \end{vmatrix} = -498$$

$$x_1 = \frac{42}{107}, \quad x_2 = -\frac{99}{107}, \quad x_3 = \frac{471}{107}, \quad x_4 = -\frac{498}{107}.$$

Příklad 40. Pomocí determinantů řešte soustavu

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 \phantom{{}- x_3} - x_4 + 2x_5 &= 2, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 \phantom{{}+ x_4} + x_5 &= 3, \\ - x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 &= 1, \\ -x_1 \phantom{{}+ x_2} - 2x_3 + x_4 + 2x_5 &= 3, \\ 2x_1 - 2x_2 \phantom{{}- x_3} + 2x_4 - x_5 &= -2. \end{aligned}$$

Nejdříve určíme determinant soustavy.

$$A = \begin{vmatrix} 1, & 2, & 0, & -1, & 2 \\ 2, & 3, & -1, & 0, & 1 \\ 0, & -1, & -1, & 2, & -3 \\ -1, & 0, & -2, & 1, & 2 \\ 2, & -2, & 0, & 2, & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & 2, & 0, & -1, & 2 \\ 0, & -1, & -1, & 2, & -3 \\ 0, & -1, & -1, & 2, & -3 \\ 0, & 2, & -2, & 0, & 4 \\ 0, & -6, & 0, & 4, & -5 \end{vmatrix} = 0,$$

neboť 2. a 3. řádek jsou stejné. Soustava tedy buď nemá řešení, nebo má řešení nekonečně mnoho. Určíme např. A_5.

$$A_5 = \begin{vmatrix} 1, & 2, & 0, & -1, & 2 \\ 2, & 3, & -1, & 0, & 3 \\ 0, & -1, & -1, & 2, & 1 \\ -1, & 0, & -2, & 1, & 3 \\ 2, & -2, & 0, & 2, & -2 \end{vmatrix} = 48$$

Jelikož $A = 0$ a $A_5 \neq 0$, nemusíme již další determinanty počítat. Soustava nemá řešení.

CVIČENÍ

Pomocí Cramerova pravidla řešte soustavy:

62.
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 &= -2 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= -4 \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= -5 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 &= -2 \end{aligned}$$

63.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 - x_5 &= -2 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 - 4x_5 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + x_5 &= 2 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 &= 5 \end{aligned}$$

64.
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 &= 1 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 &= 4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 - x_5 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 - x_5 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 &= 3 \end{aligned}$$

65.
$$\begin{aligned} -6x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + 6x_5 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 - 6x_5 &= 1 \\ 4x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 2x_4 + 12x_5 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 + 18x_5 &= 3 \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 3x_4 + 6x_5 &= -1 \end{aligned}$$

66.
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 &= 1 \\ 5x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 - x_5 &= 0 \\ 4x_1 - x_2 - 3x_3 - 2x_4 \phantom{{}+x_5} &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 \phantom{{}+x_5} &= 0 \\ 6x_1 - 4x_2 \phantom{{}+x_3} - 3x_4 \phantom{{}+x_5} &= 0 \end{aligned}$$

67. Pomocí determinantů řešte soustavy n rovnic o n neznámých z cvičení na str. 32, 75 a 76.

68. Řešte soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 3 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 &= 2 \\ 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 7x_4 &= 4 \end{aligned}$$

4. ITERAČNÍ METODY

Metody řešení soustav lineárních rovnic, které jsme dosud probírali, mají následující společné vlastnosti:

Poskytují řešení dané soustavy po provedení konečného počtu elementárních aritmetických operací (sčítání, odčítání, násobení a dělení) a počet těchto operací je dán zvolenou metodou řešení a velikostí soustavy. Kdybychom mohli provést potřebné aritmetické operace přesně (bez zaokrouhlování), získali bychom přesné řešení (za předpokladu, že výchozí údaje jsou rovněž přesné).

Nyní se budeme zabývat tzv. **iteračními metodami,** které poskytují (kromě výjimečných případů) přesné řešení až po provedení nekonečného počtu elementárních aritmetických operací. Pochopitelně nemůžeme skutečně provést nekonečný počet operací, a proto výpočty ukončíme po konečném počtu operací a spokojíme se pouze získaným přibližným řešením. Tato skutečnost nijak nehovoří v neprospěch těchto metod, neboť i při použití předchozích metod se musíme v praktických příkladech vlivem např. zaokrouhlovacích chyb spokojit pouze přibližným řešením. Naopak, jak dále uvidíme, mají iterační metody řadu výhod: jsou velmi jednoduché, vhodné při použití samočinných počítačů a také některé případné chyby, kterých se dopustíme během výpočtu, nemusí vést ke znehodnocení výsledku. Ukážeme si zde dvě nejjednodušší iterační metody pro řešení soustavy n lineárních rovnic o n neznámých.

Předpokládejme, že soustava je dána v následujícím tvaru

$$
\begin{aligned}
x_1 &= b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1n}x_n + c_1,\\
x_2 &= b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \ldots + b_{2n}x_n + c_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_n &= b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + \ldots + b_{nn}x_n + c_n.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Každou soustavu n lineárních rovnic o n neznámých lze na takový tvar skutečně upravit. Později si ukážeme, jak takovou úpravu provádíme.

A. RITZOVA (PROSTÁ ITERAČNÍ) METODA

Zvolíme nejprve libovolnou n-tici čísel $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$. Dosazením do pravých stran soustavy (1) vypočteme novou n-tici čísel, kterou označíme $(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)})$, tj.

$$
\begin{aligned}
x_1^{(1)} &= b_{11}x_1^{(0)} + b_{12}x_2^{(0)} + \ldots + b_{1n}x_n^{(0)} + c_1,\\
x_2^{(1)} &= b_{21}x_1^{(0)} + b_{22}x_2^{(0)} + \ldots + b_{2n}x_n^{(0)} + c_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_n^{(1)} &= b_{n1}x_1^{(0)} + b_{2n}x_2^{(0)} + \ldots + b_{nn}x_n^{(0)} + c_n.
\end{aligned}
$$

Stejným způsobem z n-tice $(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)})$ vypočítáme n-tici $(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)})$:

$$
\begin{aligned}
x_1^{(2)} &= b_{11}x_1^{(1)} + b_{12}x_2^{(1)} + \ldots + b_{1n}x_n^{(1)} + c_1,\\
x_2^{(2)} &= b_{21}x_1^{(1)} + b_{22}x_2^{(1)} + \ldots + b_{2n}x_n^{(1)} + c_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_n^{(2)} &= b_{n1}x_1^{(1)} + b_{n2}x_2^{(1)} + \ldots + b_{nn}x_n^{(1)} + c_n.
\end{aligned}
$$

Analogicky můžeme určit i další n-tice $(x_1^{(3)}, x_2^{(3)}, \ldots, x_n^{(3)})$, $(x_1^{(4)}, x_2^{(4)}, \ldots, x_n^{(4)})$ atd. Obecně si postup zapíšeme takto:

$$
\begin{aligned}
x_1^{(i+1)} &= b_{11}x_1^{(i)} + b_{12}x_2^{(i)} + \ldots + b_{1n}x_n^{(i)} + c_1\\
x_2^{(i+1)} &= b_{21}x_1^{(i)} + b_{22}x_2^{(i)} + \ldots + b_{2n}x_n^{(i)} + c_2\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_n^{(i+1)} &= b_{n1}x_1^{(i)} + b_{n2}x_2^{(i)} + \ldots + b_{nn}x_n^{(i)} + c_n
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Tyto n-tice čili vektory se nazývají **aproximace** řešení soustavy (1). Aproximace získané právě popsaným způsobem se mohou blížit ke skutečnému řešení soustavy (1). Záleží to na číslech b_{ij}. Platí věta:

Splňují-li koeficienty b_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, n)$ **nerovnosti**

$$
\begin{aligned}
|b_{11}| + |b_{12}| + \ldots + |b_{1n}| &< 1\\
|b_{21}| + |b_{22}| + \ldots + |b_{2n}| &< 1\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\
|b_{n1}| + |b_{n2}| + \ldots + |b_{nn}| &< 1,
\end{aligned}
\tag{3}
$$

lze vypočítat po konečném počtu kroků řešení soustavy (1) **s libovolnou předem danou přesností.** Stručně říkáme, že posloupnost aproximací **konverguje** ke skutečnému řešení.

Příklad 41. Řešme soustavu

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 0{,}009\,2x_1 - 0{,}006\,1x_2 + 0{,}070\,1x_3 + 0{,}663\,6\\
x_2 &= -0{,}064\,3x_1 + 0{,}075\,5x_2 - 0{,}032\,4x_3 - 0{,}817\,2\\
x_3 &= 0{,}021\,0x_1 - 0{,}013\,0x_2 + 0{,}081\,7x_3 - 1{,}641\,1.
\end{aligned}
$$

Již pouhým pohledem na soustavu se přesvědčíme o tom, že podmínky (3) konvergence aproximací jsou splněny. Za nultou aproximaci $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})$ zvolíme vektor absolutních členů soustavy, tj. trojici (0,663 6; −0,817 2; −1,641 1). Další aproximace budeme počítat podle předpisu (2).

$$
\begin{aligned}
x_1^{(1)} = {} & 0{,}663\,6 + 0{,}009\,2\,.\,0{,}663\,6 + (-0{,}006\,1)\,.\,(-0{,}817\,2) +\\
& + 0{,}070\,1\,.\,(-1{,}641\,1) = 0{,}559\,74
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_2^{(1)} = {} & -0{,}817\,2 + (-0{,}064\,3)\,.\,0{,}663\,6 + 0{,}075\,5\,.\,(-0{,}817\,2) +\\
& + (-0{,}032\,4)\,.\,(-1{,}641\,1) = -0{,}868\,38
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_3^{(1)} = {} & -1{,}641\,1 + (-0{,}021\,0)\,.\,0{,}663\,6 + (-0{,}013\,0)\,.\,(-0{,}817\,2) +\\
& + 0{,}081\,7\,.\,(-1{,}641\,1) = -1{,}778\,49
\end{aligned}
$$

Stejně počítáme i další aproximace. Výsledky zapisujeme do tabulky:

i	$x_1^{(i)}$	$x_2^{(i)}$	$x_3^{(i)}$
0	0,663 6	−0,817 2	−1,641 1
1	0,559 74	−0,868 38	−1,778 49
2	0,549 37	−0,861 19	−1,786 57
3	0,548 66	−0,859 66	−1,787 40
4	0,548 59	−0,859 48	−1,787 47
5	0,548 59	−0,859 45	−1,787 49

U 4. a 5. aproximace se již první čtyři desetinná místa nemění. Soudíme proto, že řešením dané soustavy je trojice čísel

$$x_1 \doteq 0{,}548\,6, \quad x_2 \doteq -0{,}859\,4, \quad x_3 \doteq -1{,}787\,5.$$

Jsou-li koeficienty a absolutní členy soustavy neúplná čísla, pak řešení soustavy lze získat s týmž počtem platných desetinných míst. Musíme ovšem v mezivýsledcích zachovávat o něco více míst, jak jsme již uváděli v kapitole o neúplných číslech.

Průběžně kontrola výpočtů zde již nehraje tak podstatnou úlohu jako při Gaussově eliminační metodě. Jsou-li totiž splněny podmínky (3) konvergence aproximací, můžeme začít počítat s jakoukoli počáteční aproximací. To znamená, že jednotlivá chyba, které se dopustíme během výpočtů (nebyla-li udělána v posledním kroku), nemá vliv na konečný výsledek; můžeme ji chápat jako změnu počáteční aproximace. Vliv takové chyby se projeví pouze v délce výpočtu — zpravidla bude k dosažení stanovené přesnosti třeba více aproximací. Pro zkrácení výpočtů má velký význam volit počáteční aproximaci pokud možno již blízkou k řešení soustavy.

B. SEIDELOVA METODA

Seidelova iterační metoda je jistou modifikací právě probrané Ritzovy metody. Volíme opět libovolnou počáteční aproximaci $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$. Další aproximaci $(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})$ určíme takto: číslo $x_1^{(1)}$ určíme stejně jako v Ritzově metodě, tj.

$$x_1^{(1)} = b_{11}x_1^{(0)} + b_{12}x_2^{(0)} + \dots + b_{1n}x_n^{(0)} + c_1.$$

Při stanovení čísla $x_2^{(1)}$ použijeme místo hodnoty $x_1^{(0)}$ (které jsme užili při Ritzově metodě) právě určenou hodnotu $x_1^{(1)}$, tj.

$$x_2^{(1)} = b_{21}x_1^{(1)} + b_{22}x_2^{(0)} + \dots + b_{2n}x_n^{(0)} + c_2.$$

Při určování čísla $x_3^{(1)}$ využijeme podobným způsobem již stanovených čísel $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}$, tj.

$$x_3^{(1)} = b_{31}x_1^{(1)} + b_{32}x_2^{(1)} + b_{33}x_3^{(0)} + \dots + b_{3n}x_n^{(0)} + c_3.$$

Je zřejmé, jakým způsobem určíme ostatní čísla první aproximace. U dalších aproximací postupujeme stejně. Obecně si tedy můžeme postup zapsat takto:

$$\begin{aligned}
x_1^{(i+1)} &= b_{11}x_1^{(i)} + b_{12}x_2^{(i)} + \dots + b_{1,n-1}x_{n-1}^{(i)} + b_{1n}x_n^{(i)} + c_1 \\
x_2^{(i+1)} &= b_{21}x_1^{(i+1)} + b_{22}x_2^{(i)} + \dots + b_{2,n-1}x_{n-1}^{(i)} + b_{2n}x_n^{(i)} + c_2 \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
x_n^{(i+1)} &= b_{n1}x_1^{(i+1)} + b_{n2}x_2^{(i+1)} + \dots + b_{n,n-1}x_{n-1}^{(i+1)} + b_{nn}x_n^{(i)} + c_n
\end{aligned}$$

Ke konvergenci aproximací získaných Seidelovou metodou stačí rovněž splnění nerovností (3). Ukazuje se, že při splnění těchto podmínek je Seidelova metoda výhodnější než metoda Ritzova v tom smyslu, že k výpočtu řešení soustavy se stejnou přesností Seidelovou metodou stačí zpravidla menší počet aproximací než při řešení metodou Ritzovou (při stejné počáteční aproximaci).

Příklad 42. Seidelovou metodou vyřešíme soustavu

$$\begin{aligned}
x_1 &= 0{,}166\,7x_2 - 0{,}250\,0x_3 - 0{,}500\,0 \\
x_2 &= 0{,}125\,0x_1 + 0{,}062\,5x_3 + 0{,}187\,5 \\
x_3 &= 0{,}200\,0x_1 + 0{,}066\,7x_2 - 0{,}266\,7.
\end{aligned}$$

Podmínky konvergence jsou splněny, neboť platí

$$\begin{aligned}
0{,}166\,7 + 0{,}250\,0 + 0{,}500\,0 &= 0{,}916\,7 < 1 \\
0{,}125\,0 + 0{,}062\,5 + 0{,}187\,5 &= 0{,}375\,0 < 1 \\
0{,}200\,0 + 0{,}066\,7 + 0{,}266\,7 &= 0{,}333\,4 < 1
\end{aligned}$$

Zvolíme-li $x_1^{(0)} = -0{,}500\,0$; $x_2^{(0)} = 0{,}187\,5$; $x_3^{(0)} = -0{,}266\,7$, dostaneme postupně tyto aproximace:

i	$x_1^{(i)}$	$x_2^{(i)}$	$x_3^{(i)}$
0	$-0{,}500\,0$	$0{,}187\,5$	$-0{,}266\,7$
1	$-0{,}402\,1$	$0{,}120\,5$	$-0{,}178\,3$
2	$-0{,}435\,3$	$0{,}122\,0$	$-0{,}171\,5$
3	$-0{,}436\,8$	$0{,}122\,2$	$-0{,}171\,1$
4	$-0{,}436\,8$	$0{,}122\,2$	$-0{,}171\,1$

Přibližné řešení tedy bude $x_1 \doteq -0{,}436\,8$; $x_2 \doteq 0{,}122\,2$; $x_3 \doteq -0{,}171\,1$.

C. UPRAVENÍ SOUSTAVY NA TVAR VHODNÝ K ITERACI

Nechť je soustava n rovnic o n neznámých dána ve tvaru

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
b_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n.
\end{aligned}$$

Převedení této soustavy na tvar (1), který je vhodný k iteraci, lze provést mnoha způsoby. Nám jde o to vybrat takový způsob, kterým bychom dospěli nejen ke tvaru (1), ale také k tomu, aby byly splněny podmínky (3) konvergence aproximací. To lze uskutečnit ve všech případech, v kterých má soustava jediné řešení.

Uvedenou úlohu lze velmi jednoduše řešit v tom případě, že platí nerovnosti

$$\begin{aligned}
|a_{11}| &> |a_{12}| + |a_{13}| + \ldots + |a_{1n}|\\
|a_{22}| &> |a_{21}| + |a_{23}| + \ldots + |a_{2n}|\\
\ldots\ldots&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
|a_{nn}| &> |a_{n1}| + |a_{n2}| + \ldots + |a_{n,n-1}|.
\end{aligned} \tag{4}$$

V takovém případě stačí z první rovnice vyjádřit x_1, z druhé x_2 a tak dále, až z n-té vyjádřit x_n. Takto vzniklá soustava bude mít tvar

$$\begin{aligned}
x_1 &= \phantom{b_{21}x_1 +{}} b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + \ldots + b_{1,n-1}x_{n-1} + b_{1n}x_n + c_1\\
x_2 &= b_{21}x_1 + \phantom{b_{12}x_2 +{}} b_{23}x_3 + \ldots + b_{2,n-1}x_{n-1} + b_{2n}x_n + c_2\\
\ldots&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_{n-1} &= b_{n-1,1}x_1 + b_{n-1,2}x_2 + \ldots + b_{n-1,n}x_n + c_{n-1}\\
x_n &= b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + \ldots + b_{n,n-1}x_{n-1} + c_n,
\end{aligned}$$

kde

$$b_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}} \qquad (i \neq j;\ i, j = 1, 2, \ldots, n),$$

$$c_i = \frac{b_i}{a_{ii}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Tato soustava je zvláštním případem soustavy (1), kde $b_{ii} = 0$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$. Dokažte si sami jako cvičení, že takto získaná soustava splňuje podmínky (3).

Příklad 43. Převedeme na tvar vhodný k iteraci soustavu

$$\begin{aligned}
4x_1 + x_2 + x_3 &= 1\\
x_1 + 4x_2 + x_3 &= 4\\
x_1 + x_2 + 4x_3 &= 16.
\end{aligned}$$

Podmínky (4) jsou zřejmě splněny, můžeme tedy soustavu převést právě popsaným způsobem na tvar

$$\begin{aligned}
x_1 &= -0{,}25x_2 - 0{,}25x_3 + 0{,}25\\
x_2 &= -0{,}25x_1 - 0{,}25x_3 + 1\\
x_3 &= -0{,}25x_1 - 0{,}25x_2 + 4.
\end{aligned}$$

Přesvědčte se, že tato soustava vyhovuje podmínkám konvergence.

Jestliže podmínky (4) nejsou splněny, musíme postupovat jinak. Pro jednoduchost výkladu si ukážeme jeden možný postup na příkladě tří rovnic o třech neznámých:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2\\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3
\end{aligned}$$

Vybereme v soustavě tu rovnici, ve které koeficient jedné neznámé je v absolutní hodnotě větší než součet absolutních hodnot koeficientů u ostatních neznámých. Je-li takových rovnic více, vybereme pouze jednu, a to takto: Platí-li např.

$$|a_{12}| > |a_{11}| + |a_{13}|,$$
$$|a_{22}| > |a_{21}| + |a_{23}|,$$

pak z rovnic

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1,\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2
\end{aligned}$$

ponecháme tu, které odpovídá menší ze zlomků

$$\frac{|a_{11}| + |a_{12}|}{|a_{12}|}, \quad \frac{|a_{21}| + |a_{22}|}{|a_{22}|}.$$

Jsou-li tyto zlomky stejné, vybereme libovolnou z nich. Potom přečíslujeme rovnice tak, aby se v absolutní hodnotě největší koeficient stal diagonálním. Jestliže tímto způsobem nejsou vybrány všechny rovnice původní soustavy, tvoříme z ještě nepoužitých rovnic a z rovnic nové soustavy lineární kombinace tak, aby byla splněna výše uvedená podmínka a mohli jsme získat další rovnice nové soustavy. Musíme přitom dbát na to, abychom při těchto operacích nevytvořili lineárně závislé rovnice. Takto získaná soustava má již diagonální koeficienty dostatečně velké, aby mohla být již popsaným způsobem převedena na tvar vhodný k iteraci.

Příklad 44. Převedeme na tvar vhodný k iteraci soustavu

$$\begin{aligned} &(\mathrm{I}) & x_1 + 3x_2 + x_3 &= 0{,}6,\\ &(\mathrm{II}) & 2x_1 + x_2 - x_3 &= -0{,}7,\\ &(\mathrm{III}) & x_1 - x_2 + 2x_3 &= 2{,}6. \end{aligned}$$

Protože platí

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -17 \neq 0,$$

má soustava jediné řešení a lze ji tedy převést na tvar vhodný k iteraci. V rovnici (I) platí pro koeficient u neznámé x_2 vztah

$$3 > 1 + 1 = 2.$$

Vybereme tuto rovnici a přečíslujeme rovnice tak, aby tento koeficient byl diagonální, tj.

$$\begin{aligned} &(\mathrm{I'}) & &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &(\mathrm{II'}) & &x_1 + 3x_2 + x_3 = 0{,}6\\ &(\mathrm{III'}) & &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Nyní k rovnici III přičteme rovnici II násobenou třemi:

$$\begin{array}{rl} 3(2x_1 + x_2 - x_3) &= -0{,}7\,.\,3\\ +\quad x_1 - x_2 + 2x_3 &= 2{,}6\\ \hline 7x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0{,}5 \end{array}$$

Výslednou rovnici můžeme vzít za rovnici (I'). Rovnici (III') získáme např. sečtením rovnice (I) násobené dvěma a rovnice (III) násobené dvěma a rovnice (II) násobené -3:

$$\begin{array}{rl} 2(x_1 + 3x_2 + x_3) &= 0{,}6\,.\,2\\ -3(2x_1 + x_2 - x_3) &= -0{,}7\,.\,(-3)\\ 2(x_1 - x_2 + 2x_3) &= 2{,}6\,.\,2\\ \hline -2x_1 + x_2 + 9x_3 &= 8{,}5 \end{array}$$

Dostaneme tak novou soustavu

$$\begin{aligned} 7x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0{,}5\\ x_1 + 3x_2 + x_3 &= 0{,}6\\ -2x_1 + x_2 + 9x_3 &= 8{,}5. \end{aligned}$$

Pro tuto soustavu již platí nerovnosti (4) a sami ji snadno uvedete na tvar vhodný k iteraci.

CVIČENÍ

69. Seidelovou metodou řešte soustavu z příkladu 41.

70. Ritzovou metodou řešte soustavu z příkladu 42.

71. Soustavu

$$\begin{aligned} 8x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 &= 5\\ -x_1 + 10x_2 + 2x_3 - x_4 &= -1\\ -4x_1 - x_2 + 8x_3 \phantom{{}- x_4} &= -6\\ - x_2 + x_3 + 4x_4 &= 1 \end{aligned}$$

řešte s přesností na dvě desetinná místa nejprve Ritzovou metodou, a pak metodou Seidelovou a srovnejte počet potřebných aproximací.

72. Ritzovou i Seidelovou metodou řešte soustavu

$$\begin{aligned} 5{,}1x_1 - 2{,}2x_2 \phantom{{}- 2x_3} - x_4 &= 7{,}592\,8\\ 3{,}6x_1 - 6{,}8x_2 - 2x_3 \phantom{{}- x_4} &= 6{,}43\\ x_1 - 0{,}5x_2 - 4x_3 - x_4 &= 3{,}318\,5\\ 3{,}4x_2 \phantom{{}- 2x_3} - 4x_4 &= -10{,}785\,8 \end{aligned}$$

s přesností na dvě desetinná místa a porovnejte rychlost konvergence.

73. Řešte soustavu

a)
$$\begin{aligned} 10x_1 + 2x_2 + x_3 &= 10\\ x_1 + 10x_2 + 2x_3 &= 12\\ x_1 + x_2 + 10x_3 &= 8 \end{aligned}$$

s přesností na 3 desetinná místa;

b)

$$\begin{aligned} x_1 &= 0{,}2x_2 - 0{,}1x_3 + 0{,}4 \\ x_2 &= 0{,}1x_1 + 0{,}1x_3 + 0{,}8 \\ x_3 &= 0{,}3x_1 - 0{,}2x_2 + 0{,}2 \end{aligned}$$

s přesností na 4 desetinná místa.

74. Ritzovou metodou s přesností na 2 desetinná místa řešte soustavu

$$\begin{aligned} -3x_1 + 0{,}5x_2 + 0{,}5x_3 &= -56{,}65 \\ 0{,}5x_1 - 6x_2 + 0{,}5x_3 &= -160 \\ 0{,}5x_1 + 0{,}5x_2 - 3x_3 &= -210. \end{aligned}$$

75. Seidelovou metodou řešte soustavu

$$\begin{aligned} 8x_1 - 2{,}4x_2 - 1{,}6x_3 + 2x_4 &= 1{,}2 \\ 10x_2 - 4x_4 - 2{,}3x_5 &= 2{,}106 \\ 3{,}2x_2 + 8x_3 + 1{,}6x_4 + 2{,}4x_5 &= -2{,}328 \\ -3{,}2x_1 - {} + 4{,}8x_3 + 10x_4 + 2{,}1x_5 &= -1{,}406 \\ -1{,}6x_1 + 1{,}6x_3 + 2{,}4x_4 + 8x_5 &= -2{,}232. \end{aligned}$$

III. Aproximace funkcí

V I. kapitole jsme viděli, že jsme často nuceni nahrazovat jedna čísla druhými, ať už proto, že je přesně neznáme, nebo proto, že jsou dána s větší přesností, než potřebujeme. V této kapitole se budeme zabývat úlohou nahrazení jedné funkce jinou funkcí. Proto si zopakujte a důkladně promyslete vše, co jste se učili o funkcích. Připomeňme jen stručně některé definice.

Funkci jste si definovali jako zobrazení jedné číselné množiny, řekněme $\mathbf{X}$, do druhé číselné množiny $\mathbf{Y}$ ($\mathbf{Y}$ může být i totožná s $\mathbf{X}$). Množinu $\mathbf{X}$ jste nazývali oborem (definičním oborem) funkce.

Předpis určující funkci jste označovali zpravidla písmeny, např. f, g, φ, nebo obvyklými symboly, např. sin, log, $\sqrt{\ }$ atd. Prvek množiny $\mathbf{Y}$, který funkce f přiřazuje prvku x množiny $\mathbf{X}$, jste označovali symbolem $f(x)$ a nazývali hodnotou funkce f v bodě x. V případech, kde nemohlo dojít k nedorozumění, jste tohoto symbolu užívali také k označení funkčního vztahu.

Definičním oborem funkcí, s kterými budeme pracovat, bude nejčastěji interval (uzavřený, otevřený nebo polouzavřený).

1. LINEÁRNÍ INTERPOLACE

Jednou z nejčastějších úloh numerické matematiky je určit hodnotu funkce v určitém bodě. Je-li funkce zadána rovnicí mezi proměnnými, např. $y = x^3$, nezdá se být tato úloha obtížnou — stačí dosadit za proměnnou x příslušnou hodnotu a provést příslušné výpočty. Avšak vztah mezi proměnnými nemusí být vždy tak jednoduchý; již např. výpočet hodnoty funkce log x nebo sin x podle definice trvá mnohem déle než výpočet funkce x^3. Dovedete jistě sami uvést příklady funkcí, pro které je výpočet ještě obtížnější. Avšak většinou potřebujeme určit hodnotu funkce ve více bodech — v deseti, ve stu, v tisíci bodech — a kromě toho obvykle musíme podobné výpočty často opakovat. V takových případech je mnohem pohodlnější a ušetří nám mnoho času a práce, vypočteme-li nejčastěji potřebné hodnoty obvykle užívaných funkcí jednou provždy a vhodným způsobem je zapíšeme. Takovým vhodným zápisem jsou tabulky. Existuje mnoho matematických tabulek a vy znáte nejlépe matematické tabulky pro I.—III. ročník SVVŠ, které používáte např. k výpočtu hodnot funkcí x^2, x^3, $\log x$ apod.

K sestavování tabulek funkčních závislostí jsme vedeni i jinými důvody. Často není funkční závislost dána nějakým předpisem a víme pouze to, že mezi danými veličinami existuje jistá závislost, např. mezi denní dobou a teplotou nebo tlakem vzduchu. Tyto závislosti zjišťujeme experimentálně měřením a získané hodnoty zapisujeme do tabulek — mluvíme pak o technických tabulkách (empirických funkcích).

Definičním oborem tabelovaných funkcí bývá obvykle interval nebo několik intervalů. Pochopitelně nemůžeme do tabulky zapsat všechny hodnoty argumentu (kterých je v takovém případě nekonečně mnoho) a odpovídající funkční hodnoty, takže tabulky obsahují jen funkční hodnoty $f(x_0)$, $f(x_1)$, $\ldots$, $f(x_n)$ v určitých, nějakým způsobem vybraných bodech x_0, x_1, $\ldots$, x_n definičního oboru funkce $f(x)$.

Obvykle hodnoty argumentu tvoří **ekvidistantní posloupnost**, což znamená, že rozdíl (vzdálenost) dvou sousedních hodnot argumentu je pro všechny dvojice stejný. Tento rozdíl nazýváme **krokem tabulky** a značíme jej zpravidla písmenem h. Ve vašich tabulkách je např. **krok tabulky** funkce x^2 rovný 0,01.

Platí tedy $\quad x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \ldots = x_n - x_{n-1} = h$

čili $\quad x_1 = x_0 + h,\ x_2 = x_0 + 2h,\ \ldots,\ x_n = x_0 + nh.$

Někdy je tabulka rozdělena na několik částí a v každé části je krok tabulky jiný.

Funkční hodnoty $f(x_0)$, $f(x_1)$, $\ldots$, $f(x_n)$ jsou uváděny se stejnou absolutní chybou. V matematických tabulkách bývá tato chyba rovna polovině jednotky posledního řádu. V technických tabulkách bývá tato chyba větší, obvykle jednotka posledního řádu.

Často potřebujeme znát rozdíly sousedních funkčních hodnot. Tyto tzv.

tabulkové diference (rozdíly), které budeme označovat symbolem $\Delta f(x)$, tj.

$$\Delta f(x_0) = f(x_1) - f(x_0),\ \Delta f(x_1) = f(x_2) - f(x_1),\ \ldots,\ \Delta f(x_{n-1}) = = f(x_n) - f(x_{n-1})$$

nebo kratčeji, použijeme-li místo symbolu $f(x_i)$ symbolu f_i

$$\Delta f_0 = f_1 - f_0,\ \Delta f_1 = f_2 - f_1,\ \ldots,\ \Delta f_{n-1} = f_n - f_{n-1},$$

bývají uváděny ve zvláštním sloupci, a to v jednotkách posledního řádu.

Schematicky můžeme tedy vyjádřit tabulku funkce $f(x)$ takto:

x	f	Δf
x_0	f_0	Δf_0
x_1	f_1	Δf_1
x_2	f_2	.
.	.	.
.	.	.
.	.	
x_{n-2}	f_{n-2}	Δf_{n-2}
x_{n-1}	f_{n-1}	Δf_{n-1}
x_n	f_n	

x	$\sin x$	$\Delta \sin x$
1,000	0,841 47	54
01	842 01	54
02	842 55	54
03	843 09	54
04	843 63	53
1,005	0,844 16	54
06	844 70	53
07	845 23	54
08	845 77	53
09	846 30	53
1,010	0,846 83	

Všimneme si ještě, že tabulkové rozdíly jsou podle pravidel o počítání s neúplnými čísly zjištěny s dvojnásobnou absolutní chybou než funkční hodnoty.

Máme-li tabulku funkce $f(x)$, snadno najdeme její hodnoty v těch bodech x, které jsou v této tabulce uvedeny. Avšak vždy se může vyskytnout úloha najít hodnotu funkce v bodě, který není v tabulce uveden. Nechceme-li se obrátit k funkčnímu předpisu, třeba pro jeho složitost (v případě empirických funkcí tohoto způsobu ani nemůžeme použít), potřebujeme znát nějaký postup, který nám umožní nalézt požadovanou hodnotu (aspoň přibližně) na základě údajů tabulky.

Dosud jste pracovali tak, že k argumentu x jste našli v tabulce dvě nejbližší hodnoty x_i, $x_{i+1} = x_i + h$ a k funkční hodnotě v bodě x_i jste přičetli opravu rovnou číslu

$\frac{\Delta f(x_i)(x - x_i)}{h}$. Určeme např. s pomocí tabulky na str. 113 sin 1,003 4.

$$x_i = 1{,}003; \quad x - x_i = 1{,}003\,4 - 1{,}003 = 0{,}000\,4; \quad \Delta \sin 1{,}003 = 0{,}000\,54;$$

$$h = 0{,}001; \quad \frac{\Delta f(x_i)(x - x_i)}{h} = \frac{0{,}000\,54 \,.\, 0{,}000\,4}{0{,}001} = 0{,}000\,216,$$

a tedy

$$\sin 1{,}003\,4 \doteq \sin 1{,}003 + 0{,}000\,216 = 0{,}843\,09 + 0{,}000\,216 \doteq 0{,}843\,31.$$

Pro urychlení výpočtu počítáme raději v jednotkách posledního řádu a využíváme předem vypočtených násobků desetiny tabulkového rozdílu (u úhlových měr násobků šedesátiny tabulkového rozdílu), které bývají uvedeny v tabulkách pod názvem P. P. (partes proportionales — části úměrné).

Tento postup je založen na tzv. **lineární interpolaci,** spočívající v tom, že na příslušném intervalu $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$ nahradíme (aproximujeme) funkci $y = f(x)$ lineární funkcí, tj. mnohočlenem prvního stupně $y = a_0 x + a_1$. Koeficienty a_0, a_1 určíme tak, aby hodnoty mnohočlenu $y = a_0 x + a_1$ v krajních bodech intervalu $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$ byly rovny hodnotám funkce $y = f(x)$. Vyžadujeme tedy, aby

$$\begin{aligned} a_0 x_i \quad + a_1 &= f(x_i) \\ a_0 x_{i+1} + a_1 &= f(x_{i+1}). \end{aligned}$$

Čísla $x_i, x_{i+1}, f(x_i), f(x_{i+1})$ známe z tabulky a řešením této soustavy najdeme

$$a_0 = \frac{f(x_i) - f(x_{i+1})}{x_i - x_{i+1}},$$

$$a_1 = f(x_i) + \frac{f(x_i) - f(x_{i+1})}{x_{i+1} - x_i}\, x_i,$$

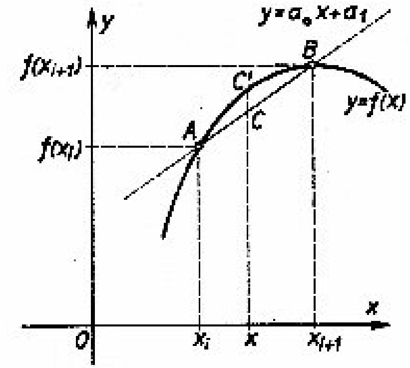
a funkci $y = f(x)$ nahradíme na intervalu $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$ funkcí

$$y = \frac{f(x_i) - f(x_{i+1})}{x_i - x_{i+1}}\, x + f(x_i) + \frac{f(x_i) - f(x_{i+1})}{x_{i+1} - x_i}\, x_i =$$

$$= f(x_i) + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i) = f(x_i) + \frac{\Delta f(x_i)(x - x_i)}{h}.$$

Za přibližnou hodnotu funkce $y = f(x)$ v bodě $x (x_i < x < x_{i+1})$ pak

považujeme hodnotu nalezeného mnohočlenu $y = f(x_i) + \frac{\Delta f(x_i)(x - x_i)}{h}$, což je zcela ve shodě s výše uvedeným známým postupem.



Obr. 1.

Znázorníme si nyní uvedený postup geometricky (obr. 1). Funkci $y = f(x)$ jsme nahradili mnohočlenem $y = a_0 x + a_1$ tak, aby hodnoty tohoto mnohočlenu v bodech x_i, x_{i+1} byly rovny hodnotám $f(x_i), f(x_{i+1})$. Grafem lineárního mnohočlenu $y = a_0 x + a_1$ je přímka, která podle podmínek $a_0 x_i + a_1 = f(x_i)$, $a_0 x_{i+1} + a_1 = f(x_{i+1})$ prochází body $A = [x_i, f(x_i)]$, $B = [x_{i+1}, f(x_{i+1})]$. Vidíme tedy, že jsme oblouk grafu funkce $y = f(x)$ nahradili na intervalu $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$ úsečkou, spojující body A, B.

Chyba, které se při tom dopustíme, je, jak vidíme na obr. 1, rovna délce úsečky CC' a závisí na hodnotě proměnné x. Podobně jako v I. kapitole není v mnoha případech možné tuto skutečnou chybu lineární interpolace určit a musíme se spokojit jejím odhadem. Skutečná chyba lineární interpolace je funkcí proměnné x. Označíme-li ji $\varphi(x)$, je zřejmé

$$\varphi(x) = f(x) - \left[f(x_i) + \frac{\Delta f(x_i)(x - x_i)}{h} \right].$$

Absolutní hodnotu funkce $\varphi(x)$ lze odhadnout pomocí diferenciálního počtu, jemuž se budete učit v matematice. My si zde uvedeme praktický odhad pomocí tzv. diferencí druhého řádu.

Tabulkové rozdíly $\Delta f(x)$ nazýváme **konečnými diferencemi prvního řádu.** Rozšíříme si nyní tabulku funkce $f(x)$, v níž je sloupec diferencí prvního řádu, ještě o jeden sloupec, který vytvoříme na základě sloupce prvních diferencí stejným způsobem, jakým je sloupec prvních diferencí vytvořen na základě sloupce funkčních hodnot. Čísla tohoto nového sloupce nazýváme **konečnými diferencemi druhého řádu** a značíme je symbolem $\Delta^2 f(x)$, tj.

$$\Delta^2 f(x_0) = \Delta f(x_1) - \Delta f(x_0),\ \Delta^2 f(x_1) = \Delta f(x_2) - \Delta f(x_1), \ldots, \Delta^2 f(x_{n-2}) = = \Delta f(x_{n-1}) - \Delta f(x_{n-2}).$$

Druhé diference zapisujeme v mezerách mezi prvními diferencemi, jako jsme první diference zapisovali v mezerách mezi funkčními hodnotami. Schematicky:

x	f	Δf	$\Delta^2 f$
x_0	f_0		
		Δf_0	
x_1	f_1		$\Delta^2 f_0$
		Δf_1	
x_2	f_2		.
.	.	.	.
.	.	.	
.	.		
x_{n-2}	f_{n-2}		
		Δf_{n-2}	
x_{n-1}	f_{n-1}		Δf_{n-2}
		Δf_{n-1}	
x_n	f_n		

Pomocí druhých diferencí odhadneme chybu lineární interpolace takto. Na uvažovaném úseku tabulky najdeme v absolutní hodnotě největší diferenci druhého řádu a $\frac{1}{8}$ absolutní hodnoty této maximální diference považujeme za odhad absolutní hodnoty skutečné chyby lineární interpolace. Např. v tabulce na str. 113 jsou tabulkové diference 54, 54, 54, 54, 53, 54, 53, ..., a tedy v absolutní hodnotě největší diference druhého řádu je rovna 1 a chyba lineární interpolace nebude větší než $\frac{1}{8} \cdot 1 = 0{,}125$ jednotek posledního řádu tabulkových hodnot, což je značně menší než absolutní chyba funkčních hodnot. Lze pak říci, že v tomto případě je lineární interpolace přípustná. Z uvedeného odhadu chyby lineární interpolace plyne, že lineární interpolace je přípustná v tom případě, jestliže sousední hodnoty tabulkových diferencí se navzájem liší o méně než 4 jednotky posledního řádu, neboť pak bude chyba interpolace menší než polovina jednotky posledního řádu ($\frac{1}{8} \cdot 4 = 0{,}5$).

Není-li tato podmínka splněna, musíme použít buď tabulky s menším krokem, nebo složitější interpolace vyššího řádu (kterou se budeme dále zabývat), anebo zvolit i zcela jiný postup.

CVIČENÍ

1. Pomocí tabulky na str. 113 určete hodnotu $y = \sin x$ pro $x = 1{,}006\,3$ a $x = 1{,}000\,48$.

2. Pomocí matematických tabulek určete čísla:
a) $3{,}627^2$; $5{,}467^2$; $9{,}231^2$; $6{,}727^2$;
b) $4{,}893^3$; $7{,}987^3$; $2{,}017^3$; $7{,}482^3$;
c) $\frac{1}{5{,}178}$; $\frac{1}{9{,}421}$; $\frac{1}{6{,}458}$; $\frac{1}{2{,}005}$
a odhadněte chybu lineární interpolace.

3. Doplňte tuto tabulku funkce f:

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$
1,01	2,374 8		
		233	
1,02			−44
1,03			−35
1,04			−29
1,05			−22
1,06			

4. Sestavte tabulku funkce $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{1{,}2 + x^3}}$ v intervalu $\langle 0{,}6; 0{,}7\rangle$ s krokem $h = 0{,}01$. Chyba funkčních hodnot nemá překročit číslo 0,05.

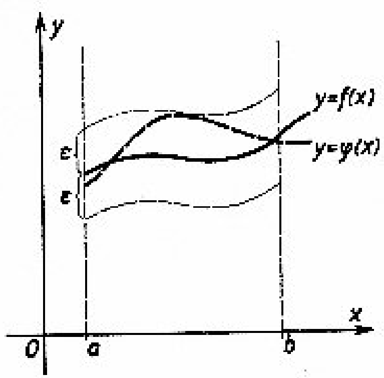
2. INTERPOLACE

V předchozím odstavci jsme na intervalu $\langle x_i, x_{i+1}\rangle$ nahrazovali funkci $f(x)$ lineárním mnohočlenem $y = a_0 x + a_1$. Tato úloha je zvláštním jednoduchým případem mnohem složitější úlohy nahradit jednu funkci $f(x)$ jinou jí „blízkou" funkcí $\varphi(x)$. K této úloze jsme vedeni buď tím, že funkce $f(x)$ je složitá a chceme ji nahradit funkcí jednodušší, anebo v případě empirických funkcí tím, že chceme aspoň přibližně znát hodnoty příslušné empirické funkce i v těch bodech, které nejsou v tabulce uvedeny. Řešení této úlohy závisí na tom, co rozumíme tím, že funkce $\varphi(x)$ je blízká k funkci $f(x)$.

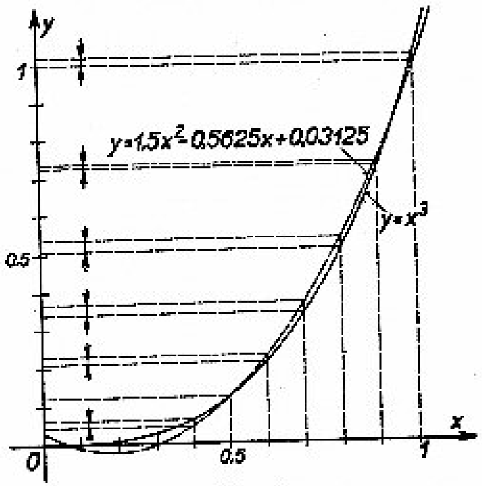
Předpokládejme, že funkce $f(x)$ je definována na intervalu $\langle a, b\rangle$. Zvolíme nějaké kladné číslo ε a nahradíme funkci $f(x)$ takovou funkcí $\varphi(x)$, že pro každé x z intervalu $\langle a, b\rangle$ bude platit

$$|f(x) - \varphi(x)| \leq \varepsilon.$$

V takovém případě se při nahrazení (aproximaci) hodnoty $f(x)$ hodnotou $\varphi(x)$ nedopustíme chyby větší, než je číslo ε, a mluvíme pak o **stejnoměrném přiblížení** nebo o **stejnoměrné aproximaci** funkce $f(x)$ funkcí $\varphi(x)$.



Obr. 2



Obr. 3

V geometrickém znázornění (obr. 2) vidíme, že graf funkce $\varphi(x)$ leží v pásu šířky 2ε utvořeném okolo grafu funkce $f(x)$. Příkladem může být nahrazení funkce $y = x^3$ na intervalu $\langle 0,1\rangle$ funkcí $y = 1{,}5x^2 - 0{,}562\,5x + 0{,}031\,25$. V tomto případě nebude chyba větší než $\pm \frac{1}{32} = \pm 0{,}031\,25$. Grafy obou funkcí na intervalu $\langle 0,1\rangle$ jsou na obr. 3.

Budeme se zabývat poněkud jednodušší úlohou, a to nahrazením funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a, b\rangle$ funkcí $\varphi(x)$ tak, aby v konečném počtu daných bodů intervalu $\langle a, b\rangle$ byly hodnoty obou funkcí stejné. V takovém případě hovoříme o **interpolačním přiblížení** či o **interpolační aproximaci.** Např. při lineární interpolaci na počátku této kapitoly měly obě funkce stejné hodnoty v bodech x_i a x_{i+1}. Ve všech případech, ať jde o aproximaci v jakémkoli smyslu, musíme mít stále na paměti, že nahrazení má praktický význam jen v tom případě, dovedeme-li odhadnout chybu, které se přitom dopustíme.

Nechť funkce $f(x)$ definovaná na intervalu $\langle a, b\rangle$ nabývá v bodech $x_0, x_1, \ldots, x_n$ hodnot $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$. Neklademe-li na funkci $\varphi(x)$ jiné požadavky, než aby v bodech $x_0, x_1, \ldots, x_n$ nabývala týchž hodnot jako funkce $f(x)$, tj., aby $\varphi(x_0) = f(x_0)$, $\varphi(x_1) = f(x_1), \ldots, \varphi(x_n) = f(x_n)$, pak úloha najít takovou funkci nemá jednoznačné řešení.

Nechť např. $x_0 = 0$, $x_1 = \pi$, $f(0) = 1$, $f(\pi) = -1$. Existuje mnoho takových funkcí, že v bodech $x_0 = 0$ a $x_1 = \pi$ nabývají týchž hodnot. Třeba funkce $y = \cos x$, $y = -\dfrac{2}{\pi}x + 1$, $y = \dfrac{3}{2\pi}x^2 - \dfrac{7}{2\pi}x + 1$. Přesvědčte se o tom dosazením a narýsujte grafy těchto funkcí. Proto na funkci $\varphi(x)$ budeme klást takové požadavky, aby úloha měla jen jediné řešení. Kromě toho budeme požadovat, aby funkce $\varphi(x)$ byla jednoduchá, abychom mohli její hodnoty snadno vypočítat. Za takové jednoduché funkce budeme považovat mnohočleny. I když úlohu zjednodušíme tak, že funkci $f(x)$ budeme nahrazovat mnohočlenem, nedospějeme, jak jsme viděli v předchozím příkladu, k jedinému řešení. Abychom dospěli k jedinému řešení, musíme klást určité podmínky na stupeň aproximujícího mnohočlenu.

Budeme požadovat, aby funkce $\varphi(x)$ aproximující funkci $f(x)$, o které víme, že v bodech $x_0, x_1, \ldots, x_n$ nabývá hodnot $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$, byla mnohočlenem a stupeň tohoto mnohočlenu aby nebyl větší než n. Ukážeme si, že takový mnohočlen existuje pouze jeden. Nazýváme jej **interpolačním mnohočlenem** a čísla $x_0, x_1, \ldots, x_n$ nazýváme **uzly** interpolace.

Mnohočlen, jehož stupeň není větší než n, má tvar

$$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n.$$

Jde nám tedy o to určit koeficienty $a_0, a_1 \ldots, a_n$ tak, aby

$$\begin{aligned} a_n + a_{n-1}x_0 + \ldots + a_1x_0^{n-1} + a_0x_0^n &= f(x_0),\\ a_n + a_{n-1}x_1 + \ldots + a_1x_1^{n-1} + a_0x_1^n &= f(x_1),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_n + a_{n-1}x_n + \ldots + a_1x_n^{n-1} + a_0x_n^n &= f(x_n). \end{aligned} \qquad (1)$$

Čísla $x_0, x_1, \ldots, x_n, f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$ známe; abychom určili koeficienty hledaného mnohočlenu, stačí vyřešit soustavu (1) $n + 1$ rovnic o $n + 1$ neznámých $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Matice soustavy (1) je tato:

$$\left\| \begin{matrix} 1, & x_0, & x_0^2, & \ldots, & x_0^n \\ 1, & x_1, & x_1^2, & \ldots, & x_1^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1, & x_n, & x_n^2, & \ldots, & x_n^n \end{matrix} \right\|$$

Její determinant je Vandermondův determinant a jelikož čísla $x_0, x_1, \ldots, x_n$ jsou navzájem různá, je tento determinant různý od nuly (viz str. 96) a podle Cramerova pravidla má soustava (1) jediné řešení.

Příklad 1. O funkci $y = f(x)$ známe pouze údaje uvedené v této tabulce:

x	-1	0	2	3
$f(x)$	2	1	0	-1

Máme najít přibližnou hodnotu této funkce v bodě $x = 1$. Funkci $f(x)$ nahradíme interpolačním mnohočlenem a jeho hodnotu v bodě $x = 1$ budeme považovat za přibližnou hodnotu funkce $f(x)$. V tabulce jsou čtyři uzly, to znamená, že stupeň interpolačního mnohočlenu nebude větší než tři. Obecný tvar takového polynomu je $y = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$. Soustava určující koeficienty a_0, a_1, a_2, a_3 pak bude

$$\begin{aligned} a_3 + a_2(-1) + a_1(-1)^2 + a_0(-1)^3 &= 2, \\ a_3 + a_2 \cdot 0 + a_1 \cdot 0^2 + a_0 \cdot 0^3 &= 1, \\ a_3 + a_2 \cdot 2 + a_1 \cdot 2^2 + a_0 \cdot 2^3 &= 0, \\ a_3 + a_2 \cdot 3 + a_1 \cdot 3^2 + a_0 \cdot 3^3 &= -1, \end{aligned}$$

tj.

$$\begin{aligned} a_3 - a_2 + a_1 - a_0 &= 2, \\ a_3 &= 1, \\ a_3 + 2a_2 + 4a_1 + 8a_0 &= 0, \\ a_3 + 3a_2 + 9a_1 + 27a_0 &= -1. \end{aligned}$$

Řešením této soustavy získáme $a_3 = 1$, $a_2 = -\frac{2}{3}$, $a_1 = \frac{1}{4}$, $a_0 = -\frac{1}{12}$. Interpolační mnohočlen je $y = -\frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{2}{3}x + 1$. Dosazením se sami přesvědčte, že tento mnohočlen je skutečně interpolačním

mnohočlenem, tj. že v uzlech interpolace nabývá stejných hodnot jako funkce $f(x)$. Přibližná hodnota funkce $f(x)$ v bodě $x = 1$ pak bude rovna hodnotě tohoto mnohočlenu v bodě $x = 1$, tj.

$$1 - \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 1^2 - \frac{1}{12} \cdot 1^3 = 0{,}5.$$

CVIČENÍ

5. Určete interpolační mnohočleny pro tyto funkce:

x	$f(x)$
-2	1
-1	1
0	0
1	1

x	$f(x)$
$0{,}1$	-1
$1{,}5$	$-0{,}5$
$3{,}2$	$1{,}8$

x	$f(x)$
0	1
1	3
2	5
8	17

x	$f(x)$
10	100
20	250
30	150

6. V rovině jsou dány body $A = [0, 1]$; $B = [-1, 3]$; $C = [1, 5]$; $D = [2, 2]$. Najděte aspoň jednu funkci, jejíž graf prochází těmito body, a narýsujte její graf.

7. Jaká je přibližná hodnota funkce $y = \ln x$ v bodě $x = 2{,}5$, víte-li, že

x	2	3	4
$\ln x$	$0{,}693\,1$	$1{,}098\,6$	$1{,}386\,3$

3. LAGRANGEŮV A NEWTONŮV TVAR INTERPOLAČNÍHO MNOHOČLENU

Při větším počtu uzlů bude soustava (1) značně rozsáhlá a řešení rozsáhlých soustav, jak jsme viděli v předchozí kapitole, vyžaduje rozsáhlou výpočtovou práci. Bylo navrženo mnoho jiných postupů pro stanovení koeficientů interpolačního mnohočlenu. Seznámíme se nyní se dvěma takovými postupy. Nejprve s postupem, který udal vynikající matematik Lagrange.

Jeden a tentýž mnohočlen můžeme napsat v různých tvarech, např. mnohočleny $y = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ a $y = (x-1)(x+2)(x-3)$ jsou, jak se snadno přesvědčíte, totožné. Z druhého tvaru uvedeného mnohočlenu je na první pohled patrné, že tento mnohočlen nabývá v bodech $x = 1$, $x = -2$, $x = 3$ nulové hodnoty. Snadno dokážete najít takový mnohočlen, který v libovolných daných bodech nabývá nulové hodnoty. Stačí napsat jej ve vhodném tvaru. Určeme např. mnohočlen, který nabývá v bodech $x = -5$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = 29{,}8$ nulové hodnoty. Stačí použít mnohočlenu $y = (x+5)\left(x - \frac{\pi}{2}\right)(x - 29{,}8)$. Ale také mnohočlen $y = A(x+5)\left(x - \frac{\pi}{2}\right)(x - 29{,}8)$, kde A je libovolné nenulové číslo, splňuje uvedené požadavky.

Nechť funkce $y = f(x)$ nabývá v uzlech $x_0, x_1, \ldots, x_n$ hodnot $f(x_0)$, $f(x_1), \ldots, f(x_n)$, tj.

x	x_0	x_1	$\ldots$	x_n
$f(x)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$\ldots$	$f(x_n)$

Snadno najdeme mnohočlen, označíme jej $\varphi_0(x)$, který je ve všech uzlech kromě x_0 roven nule a v bodě x_0 je roven jedné. Např. každý mnohočlen tvaru

$$y = A(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n), \quad A \neq 0$$

nabývá ve všech uzlech kromě x_0 nulové hodnoty. Máme ještě možnost volit číslo A. Volíme je tak, aby hodnota mnohočlenu v bodě x_0 byla rovna jedné, tj. vyžadujeme, aby

$$1 = A(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \ldots (x_0 - x_n),$$

a tedy

$$A = \frac{1}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \ldots (x_0 - x_n)}.$$

Hledaný mnohočlen bude

$$\varphi_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \ldots (x_0 - x_n)}.$$

Označme $\varphi_1(x)$ mnohočlen, který ve všech uzlech kromě x_1 nabývá nulové hodnoty a v bodě x_1 je roven jedné. Stejným způsobem zjistíme (a přesvědčte se o tom ještě dosazením hodnot $x_0, x_1, \ldots, x_n$), že

$$\varphi_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2) \ldots (x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \ldots (x_1 - x_n)}.$$

Analogicky určíme mnohočleny $\varphi_2(x), \varphi_3(x), \ldots, \varphi_n(x)$, mající obdobné vlastnosti. Dostaneme

$$\varphi_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3) \ldots (x - x_n)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3) \ldots (x_2 - x_n)}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\varphi_i(x) = \frac{(x - x_0) \ldots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \ldots (x - x_n)}{(x_i - x_0) \ldots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \ldots (x_i - x_n)}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\varphi_n(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)(x_n - x_1) \ldots (x_n - x_{n-1})}.$$

Např. pro uzly $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 3$ bude

$$\varphi_0(x) = \frac{(x-0)(x-3)}{(-1-0)(-1-3)} = \frac{1}{4}x(x-3), \quad \varphi_1(x) = \frac{(x+1)(x-3)}{(0+1)(0-3)} =$$
$$= -\frac{1}{3}(x+1)(x-3), \quad \varphi_2(x) = \frac{(x+1)(x-0)}{(3+1)(3-0)} = \frac{1}{12}(x+1)\,x.$$

Mnohočleny $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ mají tyto vlastnosti:

$$\varphi_0(x_0) = 1,\ \varphi_0(x_1) = 0,\ \varphi_0(x_2) = 0,\ \ldots,\ \varphi_0(x_n) = 0$$
$$\varphi_1(x_0) = 0,\ \varphi_1(x_1) = 1,\ \varphi_1(x_2) = 0,\ \ldots,\ \varphi_1(x_n) = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\varphi_n(x_0) = 0,\ \varphi_n(x_1) = 0,\ \varphi_n(x_2) = 0,\ \ldots,\ \varphi_n(x_n) = 1.$$

Stupeň žádného z těchto mnohočlenů není vyšší než n. Utvoříme nyní funkci

$$L(x) = f(x_0)\,\varphi_0(x) + f(x_1)\,\varphi_1(x) + \ldots + f(x_n)\,\varphi_n(x).$$

Funkce $L(x)$ je zřejmě mnohočlen, neboť vznikla sečtením mnohočlenů vynásobených určitými čísly. Protože násobením mnohočlenu číslem se stupeň mnohočlenu nezvyšuje a protože žádný ze sčítanců nemá stupeň vyšší než n, není ani stupeň mnohočlenu $L(x)$ vyšší než n. Tím je splněn jeden požadavek, který musí splňovat interpolační mnohočlen. Snadno se přesvědčíme, že je splněn i druhý požadavek, neboť

$$\begin{aligned}
L(x_0) &= f(x_0)\,\varphi_0(x_0) + f(x_1)\,\varphi_1(x_0) + \ldots + f(x_n)\,\varphi_n(x_0) = \\
&= f(x_0)\,.\,1 \quad + f(x_1)\,.\,0 \quad + \ldots + f(x_n)\,.\,0 = f(x_0), \\
L(x_1) &= f(x_0)\,\varphi_0(x_1) + f(x_1)\,\varphi_1(x_1) + \ldots + f(x_n)\,\varphi_n(x_1) = \\
&= f(x_0)\,.\,0 \quad + f(x_1)\,.\,1 \quad + \ldots + f(x_n)\,.\,0 = f(x_1), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
L(x_n) &= f(x_0)\,\varphi_0(x_n) + f(x_1)\,f_1(x_n) + \ldots + f(x_n)\,\varphi_n(x_n) = \\
&= f(x_0)\,.\,0 \quad + f(x_1)\,.\,0 \quad + \ldots + f(x_n)\,.\,1 = f(x_n).
\end{aligned}$$

Mnohočlen $L(x)$ je tedy interpolačním mnohočlenem; abychom nějakým způsobem vyznačili o jaký počet uzlů jde, budeme jej značit $L_n(x)$ a nazývat **Lagrangeovým interpolačním mnohočlenem.**

Viděli jsme, že pro daný počet uzlů existuje jediný interpolační mnohočlen. To znamená, že Lagrangeův interpolační mnohočlen $L_n(x)$ je týž jako mnohočlen, který nalezneme řešením soustavy (1); je pouze zapsán v jiném tvaru.

Určeme např. interpolační mnohočlen $L_3(x)$ na základě tabulky:

x	$f(x)$
-1	2
0	1
2	0
3	-1

$$L_3(x) = 2\,\frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(-1-0)(-1-2)(-1-3)} + 1\,\frac{(x+1)(x-2)(x-3)}{(0+1)(0-2)(0-3)} + \\ + 0\,\frac{(x+1)(x-0)(x-3)}{(2+1)(2-0)(2-3)} - 1\,\frac{(x+1)(x-0)(x-2)}{(3+1)(3-0)(3-2)}.$$

Provedením naznačených výkonů a seřazením podle mocnin x se snadno přesvědčíme, že $L_3(x) = -\frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{2}{3}x + 1$.

Na počátku této kapitoly jsme řekli, že tabulky funkcí bývají sestaveny s konstantním krokem h. Dá se očekávat, že tohoto ekvidistantního rozložení uzlů půjde nějakým způsobem využít pro další zjednodušení výpočtu interpolačního mnohočlenu. S jednou takovou metodou se nyní seznámíme. Dospějeme tak k tzv. **Newtonovu interpolačnímu mnohočlenu,** který jak uvidíme, bude mít oproti Lagrangeově mnohočlenu ještě jednu výhodu.

Nechť opět v uzlech $x_0, x_1, \ldots, x_n$ nabývá funkce $f(x)$ hodnot $f(x_0)$, $f(x_1), \ldots, f(x_n)$ a nechť dále $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_1 + 2h, \ldots, x_n = x_0 + nh$. Hledejme interpolační mnohočlen, který v tomto případě označíme symbolem $N_n(x)$, ve tvaru

$$N_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + a_n(x - x_0) \ldots \\ \ldots (x - x_{n-1}).$$

Z tohoto tvaru je zřejmé, že mnohočlen $N_n(x)$ je nanejvýš n-tého stupně. Potřebujeme určit čísla $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Při jejich vyjádření využijeme toho, že uzly $x_0, x_1, \ldots, x_n$ jsou ekvidistantně rozloženy. Utvoříme nejprve tzv. tabulku konečných diferencí. S konečnými diferencemi prvního a druhého řádu jsme se již setkali při lineární interpolaci. Analogicky, jako jsme určili diference prvního řádu na základě funkčních hodnot a diference druhého řádu na základě diferencí prvního řádu, určíme **i diference třetího řádu** na základě diferencí druhého řádu a analogicky i **diference vyšších řádů,** tj.

$$\begin{aligned}
\Delta f(x_0) &= f(x_1) - f(x_0),\ \Delta f(x_1) = f(x_2) - f(x_1), \ldots, \Delta f(x_{n-1}) = \\
&= f(x_n) - f(x_{n-1}), \\
\Delta^2 f(x_0) &= \Delta f(x_1) - \Delta f(x_0),\ \Delta^2 f(x_1) = \Delta f(x_2) - \Delta f(x_1), \ldots, \Delta^2 f(x_{n-2}) = \\
&= \Delta f(x_{n-1}) - \Delta f(x_{n-2}), \\
\Delta^3 f(x_0) &= \Delta^2 f(x_1) - \Delta^2 f(x_0),\ \Delta^3 f(x_1) = \Delta^2 f(x_2) - \Delta^2 f(x_1), \ldots, \Delta^3 f(x_{n-3}) = \\
&= \Delta^2 f(x_{n-2}) - \Delta^2 f(x_{n-3}), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Získaná čísla zapisujeme stejně jako jsme zapisovali první a druhé diference do tohoto trojúhelníkového schématu:

x	f	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$
x_0	f_0			
		Δf_0		
x_1	f_1		$\Delta^2 f_0$	
		Δf_1		$\Delta^3 f_0$
x_2	f_2		$\Delta^2 f_1$	
		Δf_2		$\Delta^3 f_1$
x_3	f_3		$\Delta^2 f_2$	
		Δf_3		$\Delta^3 f_2$
x_4	f_4		$\Delta^2 f_3$	.
		Δf_4	.	.
x_5	f_5	.	.	.
		.	.	
.	.	.		
.	.			
.	.			

Např.:

x	f	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$
-1	5				
		-2			
1	3		-1		
		-3		3	
3	0		2		-2
		-1		1	
5	-1		3		
		2			
7	1				

Nyní určíme neznámá čísla $a_0, a_1, \ldots, a_n$ v mnohočlenu

$$N_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots$$
$$\ldots + a_n(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1})$$

na základě požadavků, které musí splňovat interpolační mnohočlen.

Z podmínky $N_n(x_0) = f(x_0)$ dostaneme

$$a_0 + a_1(x_0 - x_0) + a_2(x_0 - x_0)(x_0 - x_1) + \ldots + a_n(x_0 - x_0)(x_0 - x_1) \ldots$$
$$\ldots (x_0 - x_n) = f(x_0),$$

tj.

$$a_0 + a_1 . 0 + a_2 . 0 + \ldots + a_n . 0 = f(x_0), \text{ a tedy } a_0 = f(x_0).$$

Z další podmínky $N_n(x_1) = f(x_1)$ plyne

$$a_0 + a_1(x_1 - x_0) + a_2(x_1 - x_0)(x_1 - x_1) + \ldots + a_n(x_1 - x_0)(x_1 - x_1) \ldots$$
$$\ldots (x_1 - x_n) = f(x_1),$$

tj.

$$a_0 + a_1(x_1 - x_0) + a_2 . 0 + a_3 . 0 + \ldots + a_n . 0 = f(x_1),$$

čili

$$a_0 + a_1(x_1 - x_0) = f(x_1), \text{ a tedy } a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta f(x_0)}{h}.$$

Podobně i další požadavek $N_n(x_2) = f(x_2)$ dává

$$a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) + a_3(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 -$$
$$- x_2) + \ldots + a_n(x_2 - x_0) \ldots (x_2 - x_{n-1}) = f(x_2),$$

tj.

$$a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) + a_3 . 0 + \ldots + a_n . 0 = f(x_2)$$

čili

$$a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = f(x_2).$$

Odtud dostaneme:

$$a_2 = \frac{f(x_2) - a_0 - a_1(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{f(x_2) - f(x_0) - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} =$$

$$= \frac{f(x_2) - f(x_0) - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{h} . 2h}{2h . h} = \frac{f(x_2) - f(x_0) - 2f(x_1) + 2f(x_0)}{2h^2} =$$

$$= \frac{f(x_0) - 2f(x_1) + f(x_2)}{2h^2} = \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2h^2}.$$

Stejným způsobem na základě podmínek $N_n(x_3) = f(x_3)$, $N_n(x_4) = f(x_4)$, $\ldots$, $N_n(x_n) = f(x_n)$ zjistíme, že

$$a_3 = \frac{\Delta^3 f(x_0)}{3!h^3}, \ a_4 = \frac{\Delta^4 f(x_0)}{4!h^4}, \ \ldots, \ a_n = \frac{\Delta^n f(x_0)}{n!h^n}.$$

Odvoďte sami aspoň výraz pro a_3.

Dospíváme tak k závěru, že Newtonův interpolační mnohočlen má tvar

$$N_n(x) = f(x_0) + \frac{\Delta f(x_0)}{1!h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) +$$
$$+ \frac{\Delta^3 f(x_0)}{3!h^3}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \ldots + \frac{\Delta^n f(x_0)}{n!h^n}(x - x_0)(x - x_1) \ldots$$
$$\ldots (x - x_{n-1}).$$

Opět nesmíme zapomenout, že Newtonův interpolační mnohočlen, Lagrangeův interpolační mnohočlen a i interpolační mnohočlen získaný řešením soustavy (1) jsou pro ekvidistantní uzly totožné mnohočleny, které jsou pouze zapsány různými způsoby.

Příklad 2. Sestrojíme všemi třemi nám známými způsoby interpolační mnohočlen pro funkci danou tabulkou:

x	-1	0	1
y	4	0	1

a)

$$\begin{aligned} a_2 + a_1 \cdot (-1) + a_0(-1)^2 &= 4, \\ a_2 + a_1 \cdot 0 \quad + a_0 \cdot 0^2 &= 0, \\ a_2 + a_1 \cdot 1 \quad + a_0 \cdot 1^2 &= 1, \end{aligned} \qquad \text{tj.} \qquad \begin{aligned} a_2 - a_1 + a_0 &= 4 \\ a_2 \qquad &= 0 \\ a_2 + a_1 + a_0 &= 1 \end{aligned}$$

a řešením soustavy najdeme $a_2 = 0$, $a_1 = -\frac{3}{2}$, $a_0 = \frac{5}{2}$, a tedy

$$P_2(x) = \frac{5}{2}x^2 - \frac{3}{2}x.$$

b)

$$L_2(x) = 4 \cdot \frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)} + 0 \cdot \frac{(x+1)(x-1)}{(0+1)(0-1)} +$$
$$+ \frac{(x+1)(x-0)}{(1+1)(1-0)} = \frac{4x(x-1)}{2} + \frac{(x+1)x}{2} = \frac{5}{2}x^2 - \frac{3}{2}x.$$

c) Sestavíme tabulku konečných diferencí:

x	f	Δf	$\Delta^2 f$
-1	4		
		-4	
0	0		5
		1	
1	1		

$$N_2(x) = f_0 + \frac{\Delta f_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 f_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) =$$
$$= 4 + \frac{-4}{1}(x + 1) + \frac{5}{2 \cdot 1^2}(x + 1)(x - 0) =$$
$$= 4 - 4x - 4 + \frac{5}{2}(x^2 + x) = \frac{5}{2}x^2 - \frac{3}{2}x.$$

Newtonův postup má ještě tuto výhodu. Předpokládejme, že se nám podařilo o funkci $f(x)$ z předchozího příkladu zjistit, že v bodě $x = 2$ nabývá hodnoty 3. Chceme-li při aproximaci funkce $f(x)$ využít ještě i tohoto dalšího údaje, pak při použití Newtonova interpolačního mnohočlenu $N_3(x)$ můžeme využít již známého mnohočlenu $N_2(x)$, ke kterému přičteme pouze člen

$$\frac{\Delta^3 f_0}{3!h^3}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) = \frac{-4}{6 \cdot 1^3}(x + 1)(x - 0)(x - 1).$$

Naproti tomu při ostatních postupech musíme provádět většinu výpočtů úplně znova.

Až dosud jsme se nezabývali velmi důležitou otázkou, tj. odhadem chyby interpolace. Aproximujeme-li funkci $f(x)$ interpolačním mnohočlenem $P_n(x)$, pak chyba, které se tím dopouštíme, je rovněž funkcí x. Značíme ji $R_n(x)$ a nazýváme **zbytkem interpolace**. Vyjádříme ji vztahem

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x).$$

V praxi odhadujeme absolutní hodnotu zbytku interpolace pomocí derivací funkce $f(x)$. Dá se dokázat, že platí

$$|R_n(x)| \leq \frac{|(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n)|}{(n + 1)!} M_{n+1},$$

kde M_{n+1} je maximální hodnota absolutní hodnoty derivace $(n + 1)$-ho řádu funkce $f(x)$ na intervalu obsahujícím uzly interpolace.

Odhad celkové chyby, které se obvykle při interpolaci dopouštíme, je ještě složitější. Zpravidla totiž jsou funkční hodnoty uvedené v tabulce známy pouze přibližně a musíme s nimi zacházet jako s neúplnými čísly. To znamená, že místo interpolačního mnohočlenu $P_n(x)$, určeného na základě přesných funkčních hodnot, získáme mnohočlen $\widetilde{P_n}(x)$, který jsme určili pomocí přibližných funkčních hodnot, a dopouštíme se tak další chyby

$$P_n(x) - \widetilde{P_n}(x).$$

Příklad 3. Najdeme Lagrangeův interpolační mnohočlen pro funkci $y = \ln x$ s uzly $x = 2, 3, 4$ a odhadneme zbytek interpolace pro $x = 2{,}5$.

x	$\ln x$
2	0,693 1
3	1,098 6
4	1,386 3

$$L_2(x) = 0{,}693\,1\,\frac{(x-3)(x-4)}{(-1)(-2)} + 1{,}098\,6\,\frac{(x-2)(x-4)}{1\,.\,(-1)} +$$

$$+ 1{,}386\,3\,\frac{(x-2)(x-3)}{2\,.\,1} = -0{,}471\,3 + 0{,}700\,1\,x - 0{,}058\,9\,x^2,$$

$$f(x) = \ln x,\ f'(x) = \frac{1}{x},\ f''(x) = -\frac{1}{x^2},\ f'''(x) = \frac{2}{x^3}.$$

Funkce $y = \dfrac{2}{x^3}$ na intervalu $\langle 2, 4\rangle$ nabývá největší hodnoty v bodě $x = 2$, a to hodnoty $y = \dfrac{2}{2^3} = \dfrac{1}{4}$. Pro zbytek interpolace dostaneme

$$|R_2(2{,}5)| \leq \frac{|(2{,}5-2)(2{,}5-3)(2{,}5-4)|}{3!}\cdot\frac{1}{4} = \frac{0{,}375}{4\,.\,3!} = 0{,}015\,6.$$

Interpolační aproximaci používáme také k tzv. **zjemňování tabulek.** Sestavení tabulek s malým krokem h vyžaduje mnoho výpočtové práce. Proto často postupujeme takto. Nejprve sestavíme tabulku s větším

krokem $H = k\,.\,h$, kde k je přirozené číslo, a potom interpolací z této tabulky určíme požadovanou tabulku s krokem h.

CVIČENÍ

8. S jakou chybou ve srovnání s chybou funkčních hodnot jsou určeny konečné diference druhého, třetího, ..., n-tého řádu?

9. Doplňte následující tabulku:

x	f	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$
1	3				
		−1			
2	.		8		
		—		2	
3	.		.		1
		.		.	
4	.		.		1
		.		.	
5	.		.		
		.		.	
6	.		.		
		.			
7	.				

10. Určete interpolační mnohočlen pro funkci danou tabulkou:

a)

x	$f(x)$
1	2
2	1
4	2
5	3

b)

x	$f(x)$
−1	4
0	0
1	1

c)

x	$f(x)$
1,2	2,83
1,4	2,14
1,6	1,62
1,9	−0,21

11. Určete Newtonův interpolační mnohočlen pro funkci $f(x) = \ln x$ s uzly $x = 8, 9, 10$ a ukažte, že při $x = 8{,}5$ určuje tento mnohočlen hodnotu funkce s třemi platnými desetinnými místy. Hodnoty $\ln x$ v uzlech interpolace jsou:

x	8	9	10
$\ln x$	2,079 4	2,197 2	2,302 6

12. Určete přibližnou hodnotu funkce $f(x)$ v bodě $x = 0,41$, je-li $f(x)$ dána tabulkou:

x	$-1,0$	$-0,5$	0,0	0,5	1,0
$f(x)$	2,15	3,18	4,21	3,92	2,05

13. Určete tabulku obsahující funkční hodnoty v pěti bodech tak, aby interpolační mnohočlen sestrojený na základě této tabulky byl druhého stupně.

14. Určete dva různé mnohočleny $P(x)$ a $\overline{P}(x)$, aby

$$P(0) = \overline{P}(0) = 9, \qquad P(2) = \overline{P}(2) = 3,$$
$$P(1) = \overline{P}(1) = 7, \qquad P(3) = \overline{P}(3) = -1.$$

15. Určete mnohočlen, jehož graf prochází body $A = [-2, 0]$; $B = [0, -1]$; $C = [2, 0]$; $D = [4,1]$.

4. METODA NEJMENŠÍCH ČTVERCŮ

V některých situacích není interpolační aproximace plně vyhovující. Např. při práci s empirickými funkcemi, kdy hodnoty aproximované funkce jsou dány jakožto výsledky měření, přestává mít smysl požadavek, aby se aproximující funkce $\varphi(x)$ ztotožnila s funkcí $f(x)$ v uzlových bodech. Dokonce dopustíme-li se při měření nějaké chyby (a to je při větším počtu měření velmi pravděpodobné), vedl by tento požadavek ke zbytečnému zkreslení studované závislosti. Kromě toho i při aproximaci matematicky přesně definované funkce je žádoucí brát v úvahu pokud možno všechny známé funkční hodnoty, což při interpolační aproximaci není při větším počtu uzlů rozumné a někdy ani možné. Vzpomeňte si, jak dlouho vám trval výpočet Lagrangeova interpolačního mnohočlenu v případě pěti nebo šesti uzlů. V těchto případech používáme často tzv. **metody nejmenších čtverců**, s kterou se nyní seznámíme.

Nechť je opět dána tabulka:

x_0	x_1	x_2	...	x_{n-1}	x_n
$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	...	$f(x_{n-1})$	$f(x_n)$

Nahradíme funkci $f(x)$ funkcí $\varphi(x)$, jejíž hodnoty v kterémkoli bodě uvažovaného oboru funkce $f(x)$ dovedeme snadno vypočítat. V uzlových bodech budou hodnoty funkce $\varphi(x)$ následující:

x_0	x_1	x_2	...	x_{n-1}	x_n
$\varphi(x_0)$	$\varphi(x_1)$	$\varphi(x_2)$	...	$\varphi(x_{n-1})$	$\varphi(x_n)$

Při interpolačním přiblížení jsme vyžadovali, aby

$$\varphi(x_0) = f(x_0),\ \varphi(x_1) = f(x_1),\ \ldots,\ \varphi(x_n) = f(x_n).$$

Nyní budeme vyžadovat, aby součet

$$S = [\varphi(x_0) - f(x_0)]^2 + [\varphi(x_1) - f(x_1)]^2 + \ldots + [\varphi(x_n) - f(x_n)]^2 = \sum_{i=0}^{n} [\varphi(x_i) - f(x_i)]^2$$

byl co nejmenší.

Neklademe-li na funkci $\varphi(x)$ již žádné další podmínky, nebude mít tato úloha (obdobně jako interpolační úloha) jednoznačné řešení. Protože současně chceme, aby funkce $\varphi(x)$ byla jednoduchá, budeme stejně jako při interpolaci vyžadovat, aby funkce $\varphi(x)$ byla mnohočlenem. Avšak ani tento požadavek ještě nezaručuje jednoznačnost řešení. Např. mezi všemi mnohočleny, jejichž stupeň není větší než $n - 1$, existuje jediný interpolační mnohočlen. Pro tento mnohočlen je hodnota součtu S rovna nule. Avšak součet S je součet druhých mocnin a nemůže být menší než nula. Součet S tedy nabývá pro interpolační mnohočlen své nejmenší hodnoty. Avšak mezi mnohočleny stupně vyššího než n lze vždy nalézt mnohočlen $P(x)$, pro který bude rovněž $P(x_0) = f(x_0)$,

$P(x_1) = f(x_1)$, $P(x_2) = f(x_2)$, ..., $P(x_n) = f(x_n)$ (viz cvičení 14 na str. 132), a tudíž i hodnota S pro tento mnohočlen bude rovna **nule**.

Proto budeme vyžadovat, aby stupeň hledaného mnohočlenu nebyl větší než m, kde $m < n$. V takovém případě už nelze vždy dosáhnout toho, aby součet S byl rovný nule. Nejjednodušším případem je, volíme-li (za předpokladu, že $n \geqq 2$) $m = 1$, tj. mnohočlen $\varphi(x)$ hledáme ve tvaru $\varphi(x) = a_1x + a_0$ a požadujeme, aby hodnota součtu

$$S = \sum_{i=0}^{n} [\varphi(x_i) - f(x_i)]^2 = \sum_{i=0}^{n} [(a_1x_i - a_0) - f(x_i)]^2 =$$
$$= [(a_1x_0 + a_0) - f(x_0)]^2 + [(a_1x_1 + a_0) - f(x_1)]^2 +$$
$$+ [(a_1x_2 + a_0) - f(x_2)]^2 + \ldots + [(a_1x_n + a_0) - f(x_n)]^2$$

byla co nejmenší. Tento požadavek je geometricky velmi názorný. Grafem funkce $\varphi(x) = a_1x + a_0$ je přímka a požadavek na součet S pak dává větě „tato přímka prochází co nejblíže k bodům o souřadnicích $[x_0, f(x_0)]$, $[x_1, f(x_1)]$, ..., $[x_n, f(x_n)]$" zcela určitý smysl. (Jaký?)

Pomocí diferenciálního počtu se dá dokázat, že koeficienty a_1, a_0 hledaného mnohočlenu musí vyhovovat následující soustavě tzv. **normálních rovnic**.

$$a_0 \sum_{i=0}^{n} 1 + a_1 \sum_{i=0}^{n} x_i = \sum_{i=0}^{n} f_i \qquad (2)$$
$$a_0 \sum_{i=0}^{n} x_i + a_1 \sum_{i=0}^{n} x_i^2 = \sum_{i=0}^{n} f_i \, . \, x_i \, ,$$

kde jsme pro lepší zapamatování volili označení $\sum_{i=0}^{n} 1 = n + 1$, $f_i = f(x_i)$.

Všimněme si, že v tomto označení získáme druhou rovnici z první rovnice formálně tak, že členy první rovnice napsané za znaky součtů násobíme x_i.

Řešením této soustavy najdeme koeficienty a_0, a_1. Výpočty uspořádáme tak, že tabulku $f(x)$ rozšíříme o sloupce hodnot x_i^2 a $f_i \, . \, x_i$ a součty čísel ve sloupcích této tabulky pak budou koeficienty u neznámých a_0, a_1 v soustavě (2).

Příklad 4. Najdeme rovnici přímky procházející co nejblíže (ve smyslu metody nejmenších čtverců) k bodům o souřadnicích:

x	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5
y	0,29	0,81	1,26	1,85	2,50	3,01

Rovnice přímky je dána lineárním mnohočlenem $\varphi(x) = a_1x + a_0$. Sestavíme pomocnou tabulku:

	x	y	x^2	$y \, . \, x$
	1,0	0,29	1,0	0,29
	1,5	0,81	2,25	1,22
	2,0	1,26	4,00	2,52
	2,5	1,85	6,25	4,62
	3,0	2,50	9,00	7,50
	3,5	3,01	12,25	10,54
$\sum$	13,5	9,72	34,75	26,69

Soustava normálních rovnic bude

$$6a_0 + 13{,}5\, a_1 = 9{,}72,$$
$$13{,}5a_0 + 34{,}75a_1 = 26{,}69.$$

Některou z metod II. kapitoly získáme řešení

$$a_0 \doteq -0{,}858, \; a_1 \doteq 1{,}101$$

a rovnice hledané přímky bude mít tvar

$$y = 1{,}101x - 0{,}858.$$

Na milimetrovém papíře znázorněte graficky dané body a nalezenou přímku.

Uvedeme nyní soustavu normálních rovnic v případě $m = 2$. Budeme hledat koeficienty mnohočlenu $\varphi(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ tak, aby součet

$$S = \sum_{i=0}^{n} [\varphi(x_i) - f(x_i)]^2 = \sum_{i=0}^{n} [(a_2x_i^2 + a_1x_i + a_0) - f(x_i)]^2$$

byl co nejmenší.

Normální soustava rovnic určující koeficienty a_0, a_1, a_2 je následující:

$$a_0 \sum_{i=0}^{n} 1 + a_1 \sum_{i=0}^{n} x_i + a_2 \sum_{i=0}^{n} x_i^2 = \sum_{i=0}^{n} f_i$$

$$a_0 \sum_{i=0}^{n} x_i + a_1 \sum_{i=0}^{n} x_i^2 + a_2 \sum_{i=0}^{n} x_i^3 = \sum_{i=0}^{n} f_i x_i$$

$$a_0 \sum_{i=0}^{n} x_i^2 + a_1 \sum_{i=0}^{n} x_i^3 + a_2 \sum_{i=0}^{n} x_i^4 = \sum_{i=0}^{n} f_i x_i^2$$

Z tohoto zápisu je zřejmé, jak lze formálně získat druhé dvě rovnice na základě první rovnice. Kromě toho sami již budete umět napsat soustavu normálních rovnic pro případy větších m. Zkuste to např. pro $m = 3$.

Příklad 5. Metodou nejmenších čtverců sestrojíme mnohočlen druhého stupně pro přibližné vyjádření závislosti dané tabulkou:

x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$f(x)$	3,230	3,253	3,261	3,252	3,228	3,181	3,127	3,059

Pomocná tabulka:

x	f	x^2	x^3	x^4	xf	x^2f
0,1	3,230	0,01	0,001	0,000 1	0,323 0	0,032 3
0,2	3,253	0,04	0,008	0,001 6	0,650 6	0,130 1
0,3	3,261	0,09	0,027	0,008 1	0,978 3	0,293 5
0,4	3,252	0,16	0,064	0,025 6	1,300 8	0,520 3
0,5	3,228	0,25	0,125	0,062 5	1,614 0	0,807 0
0,6	3,181	0,36	0,216	0,129 6	1,908 6	1,145 2
0,7	3,127	0,49	0,343	0,240 1	2,188 9	1,532 2
0,8	3,059	0,64	0,512	0,409 6	2,447 2	1,957 8
3,6	25,591	2,04	1,296	0,877 2	11,411 4	6,418 4

Soustava normálních rovnic:

$$\begin{aligned} 8a_0 + 3{,}6a_1 + 2{,}04a_2 &= 25{,}591 \\ 3{,}6a_0 + 2{,}04a_1 + 1{,}296a_2 &= 11{,}411\,4 \\ 2{,}04a_0 + 1{,}296a_1 + 0{,}877\,2a_2 &= 6{,}418\,4 \end{aligned}$$

Řešení: $a_0 = 3{,}193$, $a_1 = 0{,}458\,4$, $a_2 = -0{,}785\,9$,

tj. $\varphi(x) = -0{,}785\,9x^2 + 0{,}458\,4x + 3{,}193$.

CVIČENÍ

16. Napište soustavu normálních rovnic pro případ $m = 4$.

17. Sestrojte přímku procházející co nejblíže (ve smyslu metody nejmenších čtverců) k bodům $A = [1, 1]$; $B = [2, 2]$; $C = [3, 4]$; $D = [4, 4]$; $E = [5, 4]$; $F = [6, 6]$; $G = [7, 6]$ a výsledek znázorněte graficky.

18. Metodou nejmenších čtverců sestrojte mnohočlen druhého stupně na základě těchto údajů:

x	0,56	0,84	1,14	2,44	3,16
y	−0,80	−0,97	−0,98	1,07	3,66

Srovnejte hodnoty nalezeného mnohočlenu v bodech $x = 0{,}56$; $0{,}84$; $1{,}14$; $2{,}44$; $3{,}16$ s hodnotami v tabulce.

19. Metodou nejmenších čtverců nahraďte funkci $y = \frac{1}{1 + x}$ mnohočlenem čtvrtého stupně na základě funkčních hodnot v bodech $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$.

20. Mnohočlenem druhého stupně nahraďte závislost mezi veličinami x, y danou tabulkou:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	3	87	156	210	238	252	239	211	158	90	−5

IV. Přibližné metody řešení rovnic o jedné neznámé

1. HORNEROVO SCHÉMA

Dříve, než přistoupíme k vlastnímu tématu této kapitoly, seznámíme se s výpočetním postupem pro stanovení hodnoty mnohočlenu (popřípadě i jeho derivací)

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

v daném bodě $\bar{x}$.

Snadno si ověříte, že platí

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n =$$
$$= ((\ldots((a_0x + a_1)\,x + a_2)\,x \ldots + a_{n-2})\,x + a_{n-1})\,x + a_n,$$

např.

$$2x^3 + 3x^2 - x + 5 = ((2x + 3)\,x - 1)\,x + 5.$$

Při výpočtu hodnoty mnohočlenu v daném bodě x je výhodné upravit nejdříve mnohočlen právě ukázaným způsobem, pak dosadit hodnotu $\bar{x}$ a provést naznačené výkony obvyklým způsobem. Postupujeme tedy takto: koeficient a_0 násobíme číslem $\bar{x}$ a k součinu přičteme koeficient a_1. Vzniklé číslo násobíme opět hodnotou $\bar{x}$ a k výsledku přičteme koeficient a_2. Stejným způsobem pokračujeme dále, až přičteme koeficient a_n; výsledné číslo udává hodnotu uvažovaného mnohočlenu v bodě $\bar{x}$.

Popsaný postup lze přehledně uspořádat do následujícího tzv. **Hornerova schématu:**

$$\begin{array}{cccccc} a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} & a_n \\ & b_1 & b_2 & \ldots & b_{n-1} & b_n \\ \hline a_0 & c_1 & c_2 & \ldots & c_{n-1} & c_n \end{array}$$

Při výpočtu postupujeme tak, že nejprve zapíšeme do prvního a třetího řádku na příslušná místa koeficienty daného mnohočlenu. Místa pro čísla $b_1, b_2, \ldots, b_n$; $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ponecháme prázdná. Tato čísla postupně určujeme a zapisujeme do schématu takto: nejdříve určíme a zapíšeme

číslo $b_1 = a_0\bar{x}$, tj. číslo a_0 na třetí řádce násobíme $\bar{x}$ a výsledek zapíšeme na druhou řádku pod číslo a_1. Pak určíme číslo $c_1 = a_1 + b_1$, tj. sečteme prvá dvě čísla ve druhém sloupci a součet zapíšeme na třetí řádku. Dále násobením čísla c_1 číslem $\bar{x}$ získáme číslo b_2, sečtením čísel a_2 a b_2 dostaneme číslo c_2 a takto postupujeme dále, až dospějeme k číslu c_n, které udává hodnotu daného mnohočlenu v bodě $\bar{x}$.

Příklad 1. a) Určete hodnotu mnohočlenu

$$f(x) = 0{,}5x^3 - 1{,}25x^2 + 0{,}75x + 2{,}25$$

pro $x = -4{,}5$.

Vlevo od schématu si pro pohodlí zapíšeme číslo $-4{,}5$.

$$\begin{array}{r|rrrr} -4{,}5 & 0{,}50 & -1{,}25 & 0{,}75 & 2{,}25 \\ & & -2{,}25 & 15{,}75 & -74{,}25 \\ \hline & 0{,}50 & -3{,}50 & 16{,}50 & -72{,}00 \end{array}$$

Hledaná hodnota je rovna číslu -72.

b) Určete hodnotu mnohočlenu

$$f(x) = x^5 - 4x^3 + 2x^2 - x + 3$$

v bodě $x = 2$.

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 2 & 1 & 0 & -4 & 2 & -1 & 3 \\ & & 2 & 4 & 0 & 4 & 6 \\ \hline & 1 & 2 & 0 & 2 & 3 & 9 \end{array}$$

Hledaná hodnota je rovna číslu 9.

Počítáme-li hodnotu mnohočlenu v bodě $x = 1$, je zbytečné vypisovat v Hornerově schématu druhou řádku a stačí psát přímo součty. Každý součet získáme sečtením příslušného čísla v první řádce a čísla druhé řádky, které stojí nalevo od něho. Podobně i v případě $x = -1$.

Příklad 2. Určíme hodnoty mnohočlenu

$$f(x) = 5x^4 - 7x^3 + 4x^2 + 8x - 3$$

v bodech $x = 1$ a $x = -1$.

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 5 & -7 & 4 & 8 & -3 \\ & 5 & -2 & 2 & 10 & 7, \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 5 & -7 & 4 & 8 & -3 \\ & 5 & -12 & 16 & -8 & 5, \end{array}$$

tj. $f(1) = 7$, $f(-1) = 5$.

Hornerova schématu lze užít i k výpočtu hodnot derivací mnohočlenu. Hodnotu prvé derivace určíme tak, že v Hornerově schématu pokračujeme tím způsobem, že získaná čísla $a_0, c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$ považujeme za prvý řádek nového schématu. Získáme tak nová čísla $a_0, c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$, z nichž c_{n-1} násobené číslem $1!$ představuje hodnotu prvé derivace v daném bodě $\bar{x}$. Vyjdeme-li dále z čísel $a_0, c_1, \ldots, c_{n-2}$, dospějeme k novým číslům $a_0, c_1, \ldots, c_{n-2}$, z nichž c_{n-2} násobené číslem $2!$ představuje hodnotu druhé derivace. Analogicky můžeme získat hodnoty dalších derivací.

Příklad 3. Určeme hodnoty mnohočlenu $f(x)$ a jeho derivací v bodě $x = 2$, je-li

$$f(x) = 5x^4 - 7x^3 + x - 3.$$

2	5	−7	0	1	−3
		10	6	12	26
	5	3	6	13	23
		10	26	64	
	5	13	32	77	
		10	46		
	5	23	78		
		10			
	5	33			
	5				

Je tedy $f(2) = 23$, $f'(2) = 77 \cdot 1! = 77$, $f''(2) = 78 \cdot 2! = 156$, $f'''(2) = 33 \cdot 3! = 198$, $f^{(\mathrm{IV})}(2) = 5 \cdot 4! = 120$.

CVIČENÍ

1. Pomocí Hornerova schématu určete hodnoty mnohočlenů a jejich derivací v bodech $x = -1; 0; 4; 2; 3{,}1; -5{,}8$:

a) $f(x) = 3x^3 - 2x^2 - 7x + 1$, b) $f(x) = 29x^2 - x + 3$,

c) $f(x) = x^4 + 3x^2 - 2$,

d) $f(x) = 0{,}1x^5 - 2{,}5x^3 + 4x^2 + 2{,}1x - 5$.

2. Sestrojte tabulku funkce

$$f(x) = -x^6 + 3x^2 - 2x + 5$$

v intervalu $\langle -2{,}1 \rangle$ s krokem $h = 0{,}25$.

2. ROVNICE O JEDNÉ NEZNÁMÉ

Některé rovnice o jedné neznámé jste již poznali. Na základní devítileté škole jste se naučili řešit lineární rovnice

$$ax + b = 0, \ a \neq 0,$$

později jste řešili rovnice kvadratické

$$ax^2 + bx + c = 0, \ a \neq 0$$

a některé jednoduché rovnice goniometrické, exponenciální a logaritmické.

Abychom se vyhnuli případným nedorozuměním, připomeneme stručně pojem rovnice o jedné neznámé.

Mějme dány dvě funkce $f(x)$ **a** $g(x)$ **se stejným definičním oborem. Slovem rovnice označujeme úlohu:**

Zjistit, zdali v definičním oboru funkcí f **a** g **existuje číslo** x**, pro které platí**

$$f(x) = g(x) \tag{1}$$

a existuje-li, najít všechna taková čísla*).

Každé číslo x s uvedenou vlastností nazýváme **kořenem** nebo **řešením rovnice** (1). Funkci $f(x)$ říkáme **levá strana rovnice**, funkci $g(x)$ **pravá strana rovnice**, proměnné x **neznámá**. Je-li $g(x) = 0$, má rovnice (1) tvar

$$f(x) = 0 \tag{2}$$

a říkáme, že rovnice je v **anulovaném tvaru.** Kořenem je pak každé číslo, pro které je hodnota funkce $f(x)$ rovna nule. Pro mnoho rovnic nelze pomocí konečného počtu operací (sečítání, odčítání, násobení, dělení, umocňování a odmocňování) určit řešení přesně. V takových případech se musíme spokojit s přibližným řešením, tj. s řešením vyjádřeným neúplným číslem. V kapitole I jsme viděli, že v praxi počítáme převážně s neúplnými čísly, a proto tato skutečnost není na závadu, dovedeme-li určit řešení s libovolnou předem danou přesností (tj. dovedeme-li neúplné číslo představující kořen rovnice určit s libovolně malou absolutní nebo relativní chybou).

Řešení rovnice (1) přibližnými metodami provádíme obvykle ve dvou etapách:

---

*) Znovu připomeňme, že se jedná pouze o čísla reálná.

a) **Separace kořenů** — kořeny předběžně odhadneme, tj. určíme intervaly, obsahující pouze jeden kořen rovnice.

b) **Zpřesnění kořenů** — intervaly získané v 1. etapě zmenšujeme na předem danou míru. Tyto intervaly jsou pak neúplná čísla vyjadřující s danou přesností přibližné hodnoty kořenů.

Ne vždy se skutečně setkáváme s oběma etapami. Pro některé rovnice existují postupy určující kořeny s předem danou přesností a nevyžadující přitom jejich předběžné odhady. Na druhé straně se někdy podaří v první etapě stanovit intervaly tak malé, že vyhovují předepsané přesnosti; pak samozřejmě druhá etapa odpadá.

3. SEPARACE KOŘENŮ

Nejprve se budeme zabývat metodami, které slouží k předběžnému odhadu kořenů. Některých z těchto metod lze v zásadě použít i k dalšímu zpřesňování kořenů, avšak toto zpřesňování vyžaduje značné množství dodatečné práce, zatímco jiné postupy vedou k cíli mnohem rychleji a pohodlněji.

Při separaci kořenů rovnice (1), popřípadě (2) využíváme vlastností funkcí $f(x)$, $g(x)$. Platí tato věta:

Je-li $f(x)$ spojitá funkce v intervalu $\langle a, b\rangle$ a jsou-li znaménka čísel $f(a)$, $f(b)$ opačná, leží v intervalu $\langle a, b\rangle$ aspoň jeden kořen rovnice (2).

Tato věta zajišťuje pouze existenci kořene rovnice (2) v intervalu $\langle a, b\rangle$, avšak neříká nic o počtu kořenů v tomto intervalu. My však chceme určit intervaly obsahující pouze jeden kořen rovnice (2). Proto musíme využít ještě dalších vlastností, které zajišťují existenci pouze jediného kořene v intervalu $\langle a, b\rangle$. Např. stačí, aby funkce $f(x)$ byla ještě ryze monotónní v intervalu $\langle a, b\rangle$.

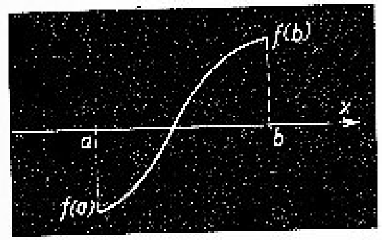
Je-li funkce $f(x)$ spojitá a ryze monotónní v intervalu $\langle a, b\rangle$ a jsou-li znaménka čísel $f(a)$, $f(b)$ stejná, pak naopak v tomto intervalu neexistuje žádný kořen rovnice (2).

V matematice jste si ukázali, že funkce $f(x)$ je v intervalu $\langle a, b\rangle$ ryze monotónní např. tehdy, nemění-li na tomto intervalu derivace $f'(x)$ své znaménko, tj. je-li v celém intervalu buď $f'(x) > 0$ (funkce $f(x)$ je

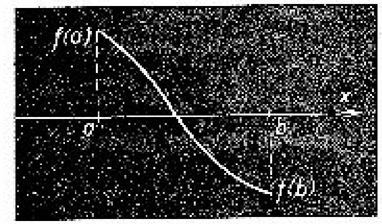
pak rostoucí — obr. 4), nebo $f'(x) < 0$ (funkce $f(x)$ je pak klesající — obr. 5).

Můžeme shrnout:

Jestliže hodnoty spojité funkce $f(x)$ mají v krajních bodech některého intervalu opačná znaménka a jestliže funkce $f(x)$ má v tomto intervalu derivaci, která nemění své znaménko, pak v tomto intervalu existuje jediný kořen rovnice $f(x) = 0$.



Obr. 4



Obr. 5

Příklad 4. Separujme kořeny rovnice $x^3 - x - 1 = 0$. Funkce $f(x) = x^3 - x - 1$ je spojitá pro všechna x. Její derivace existuje a je rovna $f'(x) = 3x^2 - 1$. Abychom zjistili, v jakých intervalech zachovává derivace $f'(x)$ znaménko, řešíme rovnici $3x^2 - 1 = 0$. Snadno určíme její kořeny: $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$. Funkce $f(x)$ tedy nemění na intervalech $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty\right)$ znaménko, a funkce $f(x)$ je tudíž v těchto intervalech monotónní.

Přitom platí

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x^3 - x - 1) = -\infty,$$

$$f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{9} + \frac{\sqrt{3}}{3} - 1 < 0,$$

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{9} - \frac{\sqrt{3}}{3} - 1 < 0,$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} (x^3 - x - 1) = \infty.$$

Odtud plyne, že intervaly $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ neobsahují žádné kořeny a že interval $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty\right)$ obsahuje jediný kořen uvažované rovnice. Bezprostředním prověřením znaménka funkce $f(x)$ např. v celočíselných bodech posledního intervalu určíme konečný interval obsahující jediný kořen dané rovnice. Dostaneme $f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) < 0, f(1) = 1 - 1 - 1 < 0,$ $f(2) = 8 - 2 - 1 > 0$, a tedy interval $\langle 1, 2\rangle$ obsahuje jediný kořen rovnice $x^3 - x - 1 = 0$, neboť čísla $f(1)$ a $f(2)$ mají opačná znaménka a funkce $f(x) = x^3 - x - 1$ je v intervalu $\langle 1, 2\rangle$ ryze monotónní.

Tohoto způsobu můžeme také použít k dalšímu zpřesňování. Zjištěný interval rozdělíme na dva intervaly a na základě hodnot funkce $f(x)$ v krajních bodech těchto intervalů zjistíme, ve kterém z nich leží hledaný kořen. V našem příkladu bude $f(1{,}5) = 0{,}875 > 0$, a kořen tedy leží v intervalu $\langle 1; 1{,}5\rangle$.

A. GRAFICKÉ METODY

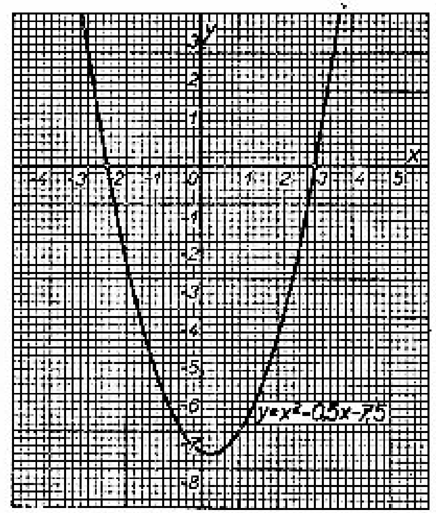
Grafické řešení rovnice (2) je velmi jednoduché. Spočívá v tom, že sestrojíme co nejpřesněji graf funkce $y = f(x)$ a souřadnice průsečíků tohoto grafu s osou x (tj. s grafem funkce $y = 0$) určují kořeny rovnice (2).

Příklad 5. Řešme graficky rovnici $x^2 - 0{,}5x - 7{,}5 = 0$. Sestrojíme graf funkce $y = x^2 - 0{,}5x - 7{,}5$. Z obr. 6 snadno zjistíme, že kořeny naší rovnice jsou dva, $x_1 = 3$, $x_2 = -2{,}5$. Přesvědčte se dosazením do rovnice, že v tomto případě se nám podařilo určit kořeny přesně.

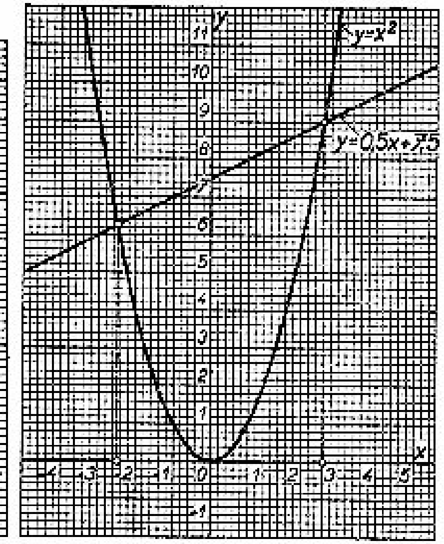
Při řešení rovnice dané ve tvaru (1) sestrojíme co nejpřesněji grafy funkcí $f(x)$ a $g(x)$. Má-li průsečík těchto grafů první souřadnici rovnou x_1, pak platí $f(x_1) = g(x_1)$, a číslo x_1 je tedy kořenem dané rovnice $f(x) = g(x)$. Např. při řešení příkladu 2 můžeme postupovat také takto: Rovnici $x^2 - 0{,}5x - 7{,}5 = 0$ převedeme na tvar $x^2 = 0{,}5x + 7{,}5$ a sestrojíme grafy funkcí $y = x^2$ a $y = 0{,}5x + 7{,}5$. Potom kořeny této rovnice budou určeny prvými souřadnicemi průsečíků těchto grafů (obr. 7).

Příklad 6. Řešme rovnici

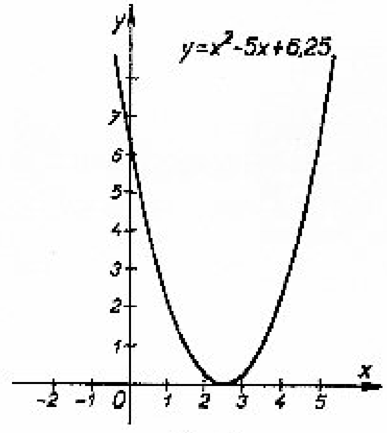
$$e^x - x^2 = 0.$$



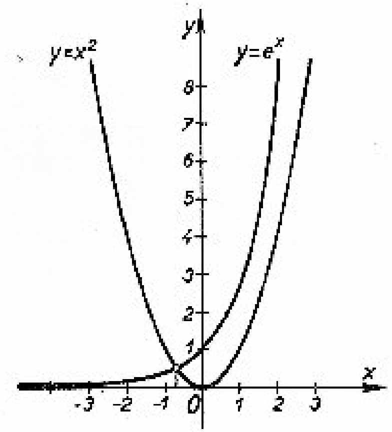
Obr. 6



Obr. 7



Obr. 8



Obr. 9

Rovnici převedeme na tvar $e^x = x^2$ a hledáme průsečíky grafů funkce $f(x) = e^x$ a $g(x) = x^2$. Z obr. 9 zjistíme, že pro první souřadnici průsečíku x_1 platí $-0{,}8 \leq x_1 \leq -0{,}6$, tj. $x_1 = -0{,}7 \pm 0{,}1$. Je to jediný kořen dané rovnice.

Jestliže graf funkce $y = f(x)$ nemá s osou x žádný společný bod, nemá rovnice (2) řešení. Může se stát, že graf funkce $y = f(x)$ se osy x pouze dotýká, pak souřadnice bodu dotyku je rovněž řešením rovnice (2).

Příklad 7. Řešme graficky rovnici

$$x^2 - 5x + 6{,}25 = 0.$$

Na obr. 8 je sestrojen graf funkce $y = x^2 - 5x + 6{,}25$. Tento graf se dotýká osy x v bodě x_1, pro který platí $2{,}4 \leqq x_1 \leqq 2{,}6$, tj. $x_1 = 2{,}5 \pm 0{,}1$.

Přesnost, s jakou graficky zjistíme kořeny rovnice (1) nebo (2), závisí na zvoleném měřítku a na vzájemné poloze grafu funkce $f(x)$ a osy x nebo grafů funkcí $f(x)$, $g(x)$. Protíná-li např. graf funkce $f(x)$ osu x pod malým úhlem, můžeme se při stanovení přibližné hodnoty kořene dopustit značné chyby. Rovněž v příkladu 7 jsme viděli, že stanovení bodu dotyku nelze provést příliš přesně. V těchto případech si někdy pomáháme vhodnou volbou stupnice na souřadnicových osách.

Metoda, kterou jsme právě popsali, je jednoduchá a názorná. Má ovšem tu nevýhodu, že sestrojování grafů funkcí může být poměrně pracné. Ukažme si, jak je možno v některých případech práci poněkud usnadnit.

Řešme kvadratickou rovnici $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$.
Převedeme ji nejprve na tvar

$$x^2 = -\frac{b}{a}x - \frac{c}{a}.$$

Víme, že grafem funkce $y = x^2$ je parabola a grafem funkce $y = -\frac{b}{a}x - \frac{c}{a}$ přímka. Tuto parabolu můžeme jednou provždy s velkou přesností sestrojit na milimetrový papír, neboť ji můžeme použít při řešení každé kvadratické rovnice. Přímku $y = -\frac{b}{a}x - \frac{c}{a}$ sestrojíme v každém jednotlivém případě jako spojnici bodů o souřadnicích $\left[0, -\frac{c}{a}\right]$ a $\left[1, -\frac{b+c}{a}\right]$. Obdobně můžeme řešit např. i kubické rovnice

$$x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0.$$

Zavedením nové neznámé $z = x + \frac{a_1}{3}$ přejde tato rovnice na tvar

$$z^3 + pz + q = 0$$

a tu převedeme na tvar

$$z^3 = -pz - q.$$

B. NOMOGRAFICKÉ METODY

Slovem *nomogram* označujeme nákres zobrazující vztah mezi několika proměnnými a umožňující zjišťovat snadno, rychle a s dostatečnou přesností hodnotu kterékoli proměnné, známe-li hodnotu ostatních proměnných.

Ukážeme si na jednoduchém, ale často užívaném vztahu

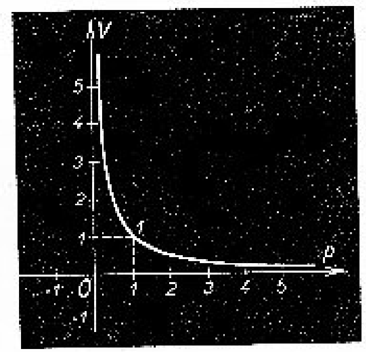
$$pV = T \tag{3}$$

mezi proměnnými p, V a T, jeden z možných postupů, jak takový nákres získat. Obdržíme tzv. **průsečíkový nomogram** vztahu (3).

Položíme-li $T = 1$, přejde vztah (3) ve vztah mezi proměnnými p a V

$$pV = 1.$$

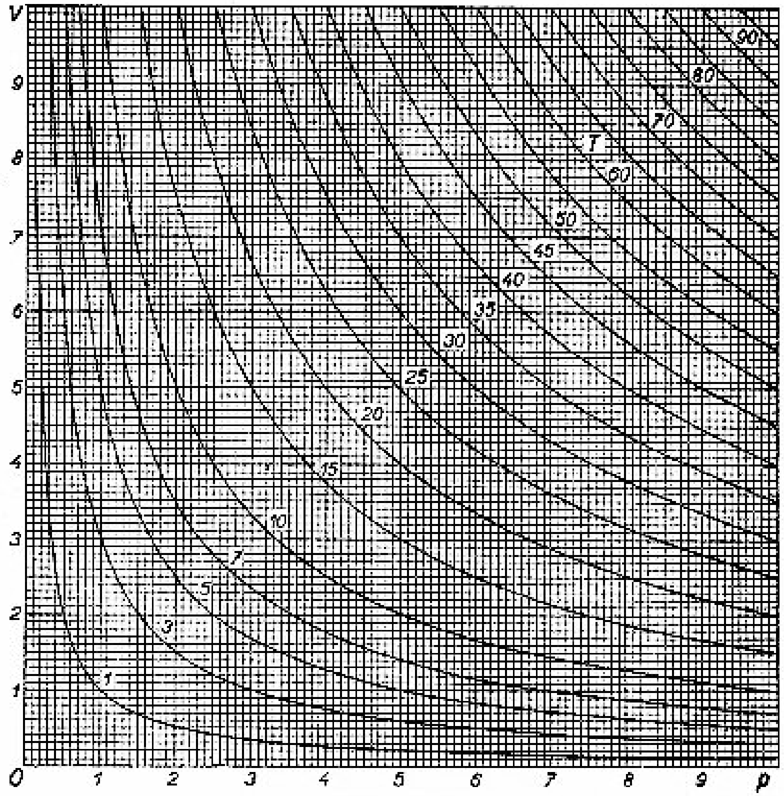
Grafickým znázorněním tohoto vztahu je větev rovnoosé hyperboly, jejíž osa půlí úhel souřadnicových os p a V (obr. 10). Pro všechny dvo-



Obr. 10

jice hodnot proměnných p a V, které určují body této větve, je hodnota proměnné T ve vztahu (3) rovna jedné. Připíšeme proto této větvi rovnoosé hyperboly číslo 1 a nazveme je **kótou** této větve.

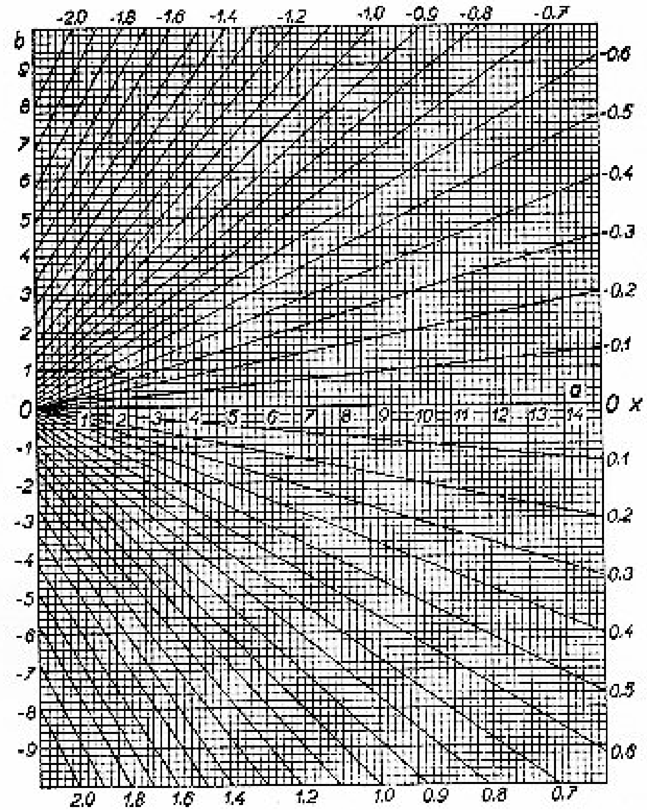
Zvolíme postupně hodnoty $T = 1, 3, 5, 7, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50$ a pro všechny tyto hodnoty sestrojíme v jednom nákresu (obr. 11) příslušné větve rovnoosých hyperbol a každé této větvi připíšeme odpovídající kótu. Získáme tak soustavu kótovaných křivek. Chceme-li nyní určit hodnotu proměnné T ve vztahu (3) na základě známých hodnot proměnných p a V, stačí najít větev hyperboly, která prochází bodem, jehož souřadnice jsou rovny známým hodnotám proměnných p a V,



Obr. 11

a kóta této větve je zřejmě hledanou hodnotou proměnné T. Není-li tato větev na nákresu zakreslena, určíme její kótu lineární interpolací z kót větví, mezi nimiž leží uvažovaný bod. Abychom mohli z nákresu určit pohodlně i hodnoty proměnných p nebo V na základě hodnot ostatních proměnných, vedeme ještě body na ose p rovnoběžky s osou V a připíšeme jim odpovídající hodnoty proměnné p a body na ose V rovnoběžky s osou p, kterým připíšeme odpovídající hodnoty proměnné V. Tak získáme tři soustavy kótovaných čar, přičemž každým bodem pro-

cházejí tři čáry, po jedné z každé soustavy; jim přiřazené kóty splňují vztah (3), takže snadno určíme hodnotu jedné proměnné, známe-li hodnoty zbylých proměnných. Získali jsme tzv. **průsečíkový nomogram** vztahu (3).



Obr. 12

Pomocí nomogramů lze řešit řadu typů rovnic. Ukážeme si postup na příkladu rovnice

$$x^3 + ax + b = 0.$$

Veličiny x, a, b budeme považovat za proměnné a sestrojíme nomogram vztahu

$$x^3 + ax + b = 0. \tag{5}$$

Zvolíme-li pevně hodnotu proměnné x, přejde vztah (5) v rovnici přímky v soustavě souřadnic a, b. Sestrojíme tyto přímky pro různé hodnoty proměnné x a připíšeme jim tyto hodnoty jako kóty. Na obr. 12 jsou sestrojeny přímky

$$b = -xa - x^3$$

pro $x = 0; \pm 0{,}1; \pm 0{,}2; \pm 0{,}3; \ldots; \pm 1{,}5$.

Z tohoto nomogramu snadno vyčteme přibližné hodnoty kořenů rovnice (5) pro libovolné koeficienty a, b — stačí určit kótu přímky procházející bodem o souřadnicích $[a, b]$. Např. v rovnici

$$x^3 + 2x + 1 = 0$$

je $a = 2$, $b = 1$; pomocí nomogramu 12 zjistíme, že bodem o souřadnicích [2, 1] prochází přímka, pro jejíž kótu x_1 platí

$$-0{,}5 \leq x_1 \leq -0{,}4, \quad \text{tj.} \quad x_1 = -0{,}45 \pm 0{,}05.$$

Stejným způsobem můžeme sestrojit nomogram i pro řešení rovnice tvaru

$$x^n + ax^m + b = 0,$$

kde n a m jsou daná pevná čísla, nebo i pro rovnici tvaru

$$f_1(x) + af_2(x) + bf_3(x) = 0,$$

kde $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ jsou dané funkce proměnné x.

Výhodou nomografického řešení ve srovnání s obyčejným grafickým řešením je zvláště to, že nemusíme pro různé rovnice stejného typu konstruovat různé grafy. Z druhé strany vyžaduje konstrukce nomogramu zpravidla mnohem více práce, než konstrukce jednoho nebo několika grafů a klade značné požadavky na přesnost rýsování. Z těchto důvodů používáme nomografického řešení rovnic převážně v těch případech, kdy jde o řešení většího počtu rovnic stejného typu.

C. ALGEBRAICKÉ ROVNICE

Algebraická rovnice je rovnice $f(x) = 0$, kde $f(x)$ je **mnohočlen**, tj. rovnice tvaru

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0. \tag{6}$$

Stupeň příslušného mnohočlenu je **stupeň algebraické rovnice**; koeficienty mnohočlenu jsou **koeficienty rovnice**; koeficient a_n je **absolutní člen rovnice.** Všechny tyto názvy jsou obdobné názvům užívaným pro mnohočleny. Je-li $a_0 = 1$, nazýváme rovnici normovanou.

Při separaci kořenů algebraických rovnic můžeme kromě již uvedených postupů využít i dalších vlastností vyplývajících z toho, že funkce $f(x)$ v rovnici (2) je mnohočlenem. Uveďme některé z nich.

Číslo u **nazveme dolní hranicí reálných kořenů algebraické rovnice** a číslo v **horní hranicí, jestliže všechny reálné kořeny dané rovnice leží v intervalu** $\langle u, v\rangle$. Protože se zabýváme pouze reálnými kořeny rovnic, budeme přívlastek reálný vynechávat. Při stanovení dolní a horní hranice kořenů vycházíme z **normované rovnice,** tj. z rovnice

$$x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0. \tag{7}$$

Horní hranici kořenů rovnice (7) můžeme určit podle některého z těchto pravidel:

1. **Je-li** a_i **záporný koeficient s největší absolutní hodnotou rovnice** (7), **je číslo** $1 + |a_i|$ **horní hranicí kořenů této rovnice.**

2. **Je-li** k **index prvního záporného koeficientu rovnice** (7) **a je-li** a_i **záporný koeficient této rovnice s největší absolutní hodnotou, je číslo** $1 + \sqrt[k]{|a_i|}$ **horní hranicí kořenů rovnice** (7).

3. **Označme symbolem** $f(x)$ **levou stranu rovnice** (7). **Nabývají-li pro určité číslo** a **všechny mnohočleny** $f(x), f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n-1)}(x)$ **vesměs nezáporných hodnot, je číslo** a **horní hranicí kořenů rovnice** (7).

Příklad 8. a) Určeme horní hranici kořenů rovnice

$$-2x^4 - 6x^3 - 42x^2 + 134x - 180 = 0.$$

Dělením obou stran této rovnice číslem -2 získáme normovanou rovnici

$$x^4 + 3x^3 + 21x^2 - 67x + 90 = 0.$$

Podle prvního pravidla nebude žádný kořen této rovnice větší, než $1 + |-67| = 68$. Podle druhého pravidla obdržíme jako horní hranici kořenů číslo $1 + \sqrt[3]{|-67|} \doteq 5{,}06$.

b) Určeme horní hranici kořenů rovnice

$$x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 26x - 24 = 0.$$

Použijme třetího pravidla

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 26x - 24, \\ f'(x) &= 4x^3 - 18x^2 + 6x + 26, \\ f''(x) &= 12x^2 - 36x + 6, \\ f'''(x) &= 24x - 36. \end{aligned}$$

Pro $x = 2$ je $f'''(2) > 0$ a $f''(2) < 0$. Pro $x = 3$ je $f'''(3) > 0$, $f''(3) > 0$ a $f'(3) < 0$. Pro $x = 4$ je $f'''(4) > 0$, $f''(4) > 0$, $f'(4) > 0$, $f(4) = 0$. To znamená, že číslo 4 je horní hranicí kořenů uvažované rovnice. Číslo 4 je dokonce jejím kořenem.

Známe-li horní hranici kořenů, určíme dolní hranici na základě těchto pravidel:

4. **Je-li číslo a horní hranicí kořenů rovnice $f(-x) = 0$, je číslo $-a$ dolní hranicí kořenů rovnice $f(x) = 0$.**

5. **Převrácená hodnota horní hranice kořenů rovnice $f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ je dolní hranicí kladných kořenů rovnice $f(x) = 0$. Záporně vzatá převrácená hodnota horní hranice kořenů rovnice $f\left(-\frac{1}{x}\right) = 0$ je horní hranicí záporných kořenů rovnice $f(x) = 0$.**

Příklad 9. a) Určeme horní i dolní hranici kořenů rovnice

$$6x^3 - 2x^2 + 4x - 1 = 0.$$

Normovaný tvar této rovnice je

$$x^3 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{6} = 0.$$

Podle pravidla 1 je horní hranicí číslo $\frac{4}{3}$. Určíme nyní dolní hranici.

$$f(-x) = (-x)^3 - \frac{1}{3}(-x)^2 + \frac{2}{3}(-x) - \frac{1}{6} = -x^3 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{6}.$$

Převedeme-li rovnici $f(-x) = 0$ na normovaný tvar, získáme rovnici

$$x^3 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{6} = 0,$$

která nemá žádný záporný koeficient a taková rovnice nemá žádný kladný kořen (dosadíme-li za x kladné číslo, jsou všichni sčítanci na levé straně

kladní). Je tedy horní hranicí kořenů této rovnice číslo nula. Můžeme proto tvrdit, že všechny kořeny původní rovnice leží v intervalu $\langle 0, \frac{4}{3}\rangle$.

b) Rovnice

$$x^7 - 5x^6 + 6x^5 - 32x^2 + 160x - 192 = 0$$

má jen kladné kořeny. Určeme dolní hranici těchto kořenů.

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^7} - \frac{5}{x^6} + \frac{6}{x^5} - \frac{32}{x^2} + \frac{160}{x} - 192 = 0$$

Vynásobíme obě strany rovnice číslem $-\frac{x^7}{192}$; dostaneme normovanou rovnici

$$x^7 - \frac{160}{192}x^6 + \frac{32}{192}x^5 - \frac{6}{192}x^2 + \frac{5}{192}x - \frac{1}{192} = 0.$$

Horní hranice kořenů této rovnice je číslo $1 + \frac{160}{192} = \frac{11}{6}$, a číslo $\frac{6}{11}$ je tedy dolní hranicí kořenů původní rovnice.

Někdy můžeme separovat kořeny rovnice (6) pomocí tzv. Budanovy-Fourierovy věty:

Jestliže $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ má rovnice $f(x) = 0$ v intervalu $\langle a, b\rangle$ (kde a, b nejsou kořeny této rovnice) právě tolik (nebo o sudý počet méně) kořenů, o kolik je počet znaménkových změn posloupnosti $f(a), f'(a), f''(a), \ldots, f^{(n)}(a)$ větší, než počet znaménkových změn posloupnosti $f(b), f'(b), f''(b), \ldots, \ldots, f^{(n)}(b)$.

Příklad 10. Pokusme se pomocí věty Budanovy-Fourierovy separovat kořeny rovnice

$$2x^5 - x^4 - 16x^3 + 8x^2 + 24x - 12 = 0.$$

Snadno zjistíme, že

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^5 - x^4 - 16x^3 + 8x^2 + 24x - 12, \\ f'(x) &= 10x^4 - 4x^3 - 48x^2 + 16x + 24, \\ f''(x) &= 40x^3 - 12x^2 - 96x + 16, \\ f'''(x) &= 120x^2 - 24x - 96, \\ f^{\mathrm{IV}}(x) &= 240x - 24, \\ f^{\mathrm{V}}(x) &= 240. \end{aligned}$$

Pomocí Hornerova schématu sestavíme tabulku:

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(x)$	$f^{(IV)}(x)$	$f^{(V)}(x)$
-3	-147	462	-884	1056	-744	240
-2	20	-8	-160	432	504	240
-1	-15	-26	60	48	-264	240
0	-12	24	16	-96	-24	240
1	5	-2	-52	0	216	240
2	-12	-8	96	336	456	240
3	105	342	700	912	696	240

Protože záleží pouze na znaménkových změnách, sestrojíme pro větší přehlednost novou tabulku, v níž budou uvedena jen příslušná znaménka. (Často můžeme sestavit tabulku znamének přímo odhadem bez znalosti přesných hodnot funkcí.)

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(x)$	$f^{(IV)}(x)$	$f^{(V)}(x)$	Z. z.	Rozdíl
-3	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	5	1
-2	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$	4	1
-1	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$	3	0
0	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	3	1
1	$+$	$-$	$-$		$+$	$+$	2	1
2	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	1	1
3	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	

Počet znaménkových změn posloupnosti $f(x), f'(x), f''(x), f'''(x), f^{(IV)}(x), f^{(V)}(x)$ (pro čísla x uvedená v tabulce) je ve sloupci, označeném „Z. z." V posledním sloupci jsou uvedeny rozdíly znaménkových změn pro příslušný interval. Z věty Budanovy-Fourierovy pak plyne, že daná rovnice má po jednom kořenu v každém z intervalů $\langle -3, -2\rangle, \langle -2, -1\rangle, \langle 0, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle$. Přesvědčte se dosazením, že čísla $-\sqrt{2}, \sqrt{2}, -\sqrt{6}, \sqrt{6}, \frac{1}{2}$ ležící v těchto intervalech jsou kořeny dané rovnice.

CVIČENÍ

1. Zjistěte, zda rovnice $x^3 - 3x^2 - \frac{5}{3}x + 5 = 0$ má kořen v intervalu $\langle 2,8; 4\rangle$ a rovnice $\frac{2}{x^2} - 3 = 0$ v intervalu $\langle 0,5; 1\rangle$.

2. Separujte kořeny rovnice:
a) $x^3 + 2x - 8 = 0$
b) $x^3 - 2x - 5 = 0$
c) $3x^5 - 25x^3 + 60x - 1 = 0$
d) $\sin x - x \cos x = 0$
e) $\cos x = x^2$
f) $2 - x = \ln x$

3. Řešte graficky rovnice:
a) $x^2 + 2x - 3 = 0$
b) $4x^2 - 12x + 9 = 0$
c) $x^3 - 2x^2 + 2x - 4 = 0$
d) $x^3 - x^2 - 3x + 3 = 0$
e) $x^2 - 3x + 4 = 0$
f) $x^2 - 4x - 2 = 0$
g) $4x^2 - 20x + 25 = 0$
h) $x^3 + 5x^2 + 2x - 8 = 0$

4. Řešte graficky rovnici $3x - \cos x - 1 = 0$.

5. Sestrojte nomogram pro řešení kvadratické rovnice $x^2 + ax + b$ a řešte rovnice:
a) $x^2 - 0{,}2x - 0{,}99 = 0$
b) $x^2 + x + 1 = 0$

6. Určete hranici kořenů rovnice:
a) $x^3 + x^2 - 10x + 8 = 0$
b) $x^8 + 9x^7 - 6x^6 - 5x^5 + 4x^4 - 2x^2 - 20x + 96 = 0$

7. Zjistěte, zdali číslo -2 je dolní hranicí kořenů rovnice
$$x^4 - 7x^3 + 13x^2 + 3x - 18 = 0.$$

8. Kolik kořenů má rovnice $x^5 - 5x + 6 = 0$ v intervalu $\langle 1,2\rangle$?

4. ZPŘESNĚNÍ KOŘENŮ

Předpokládejme, že se nám podařilo kořeny rovnice $f(x) = 0$ separovat. Nechť např. v intervalu $\langle a, b\rangle$ leží kořen $x = \bar{x}$. Nahradíme-li neznámou hodnotu kořene kterýmkoli číslem x_0 z intervalu $\langle a, b\rangle$, bude — jak jsme viděli v kapitole o neúplných číslech — absolutní chyba aproximace x_0 rovna číslu $b - a$. Nahradíme-li kořen $\bar{x}$ střední aproximací neúplného čísla $\langle a, b\rangle$, tj. $x_0 = \frac{a+b}{2}$, bude absolutní chyba této aproximace rovna $\frac{b-a}{2}$. Nevyhovuje-li žádná z aproximací požadované přesnosti, musíme nalezenou aproximaci dále zpřesňovat, tj.

zúžit interval $\langle a, b\rangle$ na interval $\langle a_1, b_1\rangle$ obsahující rovněž hledaný kořen $\bar{x}$. Nedosáhneme-li ještě požadované přesnosti, pokračujeme stejným způsobem dále, tj. zúžíme interval $\langle a_1, b_1\rangle$ na interval $\langle a_2, b_2\rangle$ atd., až dosáhneme požadované přesnosti. Takové postupné zpřesňování je **iteračním procesem** a s jedním takovým postupem jsme se již setkali v příkladu 4. Spočívá v tom, že interval $\langle a, b\rangle$ rozdělíme (např. rozpůlíme) dělicím bodem c na dva intervaly a porovnáním znamének čísel $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$ zjistíme, v kterém z intervalů $\langle a, c\rangle$, $\langle c, b\rangle$ leží hledaný kořen. (Mlčky jsme předpokládali, že $f(x)$ je funkce spojitá a že čísla $f(a)$, $f(b)$ mají opačná znaménka.) Získaný interval, označme jej $\langle a_1, b_1\rangle$, opět rozdělíme bodem c_1 a postupujeme analogicky tak dlouho, až dosáhneme stanovené přesnosti.

Příklad 11. Určeme právě popsaným způsobem kořen rovnice

$$x^3 - x - 1 = 0,$$

ležící v intervalu $\langle 1, 2\rangle$, s chybou nepřevyšující 0,005. Postup řešení je zapsán v následující tabulce, kde $a_0 = a$, $b_0 = b$, $c_0 = c$.

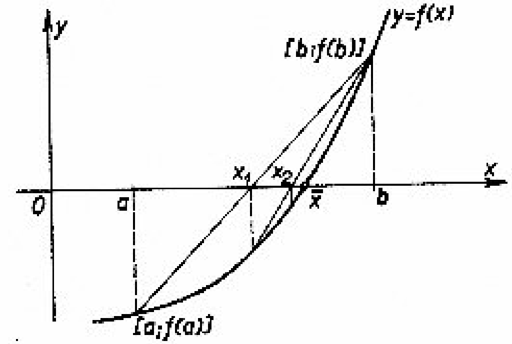
i	$\langle a_i, b_i\rangle$	c_i	$f(c_i)$	Znaménka		
				$f(a_i)$	$f(c_i)$	$f(b_i)$
0	$\langle 1; 2\rangle$	1,5	0,875	−	+	+
1	$\langle 1; 1{,}5\rangle$	1,2	0,472	−	−	+
2	$\langle 1{,}2; 1{,}5\rangle$	1,3	−0,103	−	−	+
3	$\langle 1{,}3; 1{,}5\rangle$	1,4	0,344	−	+	+
4	$\langle 1{,}3; 1{,}4\rangle$	1,35	0,110	−	+	+
5	$\langle 1{,}3; 1{,}35\rangle$	1,33	0,023	−	+	+
6	$\langle 1{,}3; 1{,}33\rangle$	1,32	−0,020	−	−	+
7	$\langle 1{,}32; 1{,}33\rangle$					

Vidíme, že kořen $\bar{x}$ je vyjádřen neúplným číslem $\langle 1{,}32; 1{,}33\rangle$, jehož střední aproximace je $\dfrac{1{,}32 + 1{,}33}{2} = 1{,}325$; absolutní chyba této aproximace je $\dfrac{1{,}33 - 1{,}32}{2} = 0{,}005$, tj. $\bar{x} = 1{,}325 \pm 0{,}005$.

V uvedeném postupu volíme polohu dělicího bodu c nezávisle na vlastnostech funkce $f(x)$. Je přirozené očekávat, že postupy využívající vlastností funkce $f(x)$ povedou rychleji k cíli — budou efektivnější. Seznámíme se nyní s několika nejpoužívanějšími postupy.

A. METODA TĚTIV (lineární interpolace, regula falsi)

Nechť interval $\langle a, b\rangle$ obsahuje jediný kořen rovnice $f(x) = 0$ ($f(x)$ je spojitá) a nechť čísla $f(a)$, $f(b)$ mají opačná znaménka. Při zpřesňování budeme postupovat následujícím způsobem. Graf funkce $f(x)$ nahradíme mezi body $[a, f(a)]$, $[b, f(b)]$ tětivou (viz obr. 13), tj. funkci $f(x)$ nahradíme v intervalu $\langle a, b\rangle$ lineárním interpolačním mnohočlenem. Určeme např. Newtonův interpolační mnohočlen:



Obr. 13

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$
a	$f(a)$	$f(b) - f(a)$
b	$f(b)$	

$$N_1(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Nyní místo rovnice $f(x) = 0$ vyřešíme rovnici $N_1(x) = 0$, kterou jako každou lineární rovnici dovedeme snadno vyřešit.

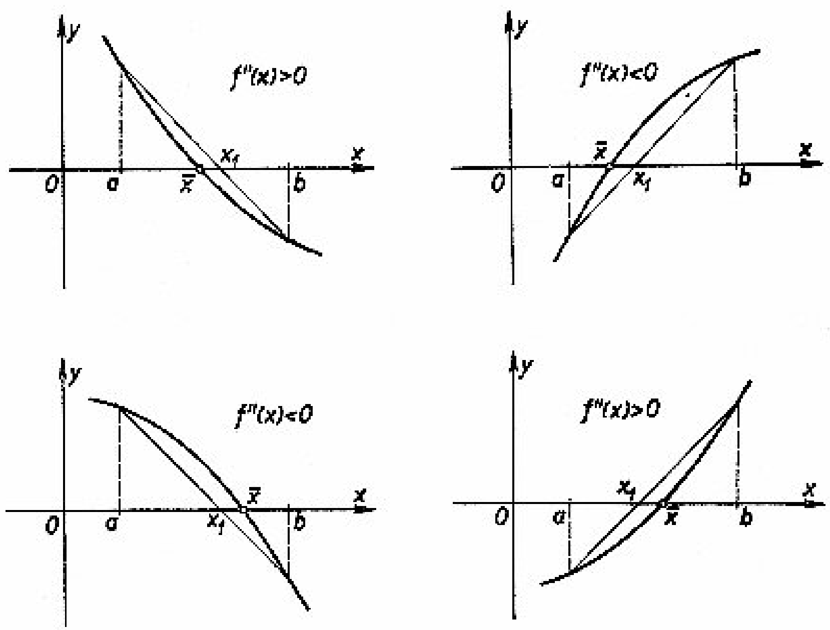
$$N_1(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) = 0$$

$$x = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$$

Získané řešení označíme x_1. Interval $\langle a_1, b_1\rangle$ představující zpřesnění kořene vyjádřeného předtím neúplným číslem $\langle a, b\rangle$ bude buď interval $\langle a, x_1\rangle$, nebo $\langle x_1, b\rangle$ v závislosti na znaménkách čísel $f(a)$, $f(x_1)$, $f(b)$.

Při dalším zpřesňování použijeme tohoto postupu na interval $\langle a_1, b_1\rangle$; získáme tak další aproximaci $x_2 = \dfrac{a_1 f(b_1) - b_1 f(a_1)}{f(b_1) - f(a_1)}$ a interval $\langle a_2, b_2\rangle$ atd.

V některých případech ani nemusíme porovnávat znaménka čísel $f(a_i)$, $f(x_i)$, $f(b_i)$. Jestliže na intervalu $\langle a_i, b_i\rangle$ nemění znaménko nejen první derivace, ale i druhá derivace, má graf funkce $f(x)$ jeden z tvarů uvedených na obr. 14 a kořen $\bar{x}$ leží vždy mezi číslem x_{i+1} a tím koncem



Obr. 14a, b, c, d

intervalu $\langle a_i, b_i\rangle$, v kterém má hodnota funkce $f(x)$ stejné znaménko jako její druhá derivace. V takovém případě můžeme jednotlivé aproximace x_i určovat ze vzorců

$$x_i = \frac{af(x_{i-1}) - x_{i-1}f(a)}{f(x_{i-1}) - f(a)}, \quad x_0 = b \tag{8a}$$

nebo

$$x_i = \frac{x_{i-1}f(b) - bf(x_{i-1})}{f(b) - f(x_{i-1})}, \quad x_0 = a, \tag{8b}$$

v závislosti na tom, je-li $f(a) \,.\, f''(x) > 0$, nebo $f(b) \,.\, f''(x) > 0$.

V těchto případech se tedy jeden krajní bod intervalů $\langle a_i, b_i\rangle$ nemění a čísla x_i se blíží k přesné hodnotě kořenů vždy z jedné strany (obr. 13). Při stejném způsobu odhadu chyby jako v předchozím případě nemůžeme dospět k lepšímu odhadu, než je absolutní hodnota rozdílu přesné hodnoty kořene a příslušného neměnného konce intervalu (na obr. 13 je to $|b - \bar{x}|$), přestože skutečnou chybu můžeme snížit na libovolně malé číslo. Proto při metodě tětiv používáme jiných odhadů, založených na vyšetření hodnot derivace funkce $f(x)$. V praxi obvykle proces zakončíme tehdy, až se v několika následujících aproximacích kořene opakuje dostatečný počet desetinných míst (číslic).

Příklad 12. Metodou tětiv určíme kořen rovnice

$$x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 11x - 12 = 0$$

ležící v intervalu $\langle 3; 4{,}5\rangle$ a iterační proces zakončíme tehdy, až se v aproximacích začnou opakovat dvě desetinná místa.

Nejprve vypočteme čísla $f(3)$ a $f(4{,}5)$. K jejich výpočtu užijeme Hornerova schématu:

3	1	−4	−2	11	−12
		3	−3	−15	−12
	1	−1	−5	−4	−24

4,5	1	−4	−2	11	−12
		4,5	2,25	1,125	54,562 5
	1	0,5	0,25	12,125	42,562 5

tj. $f(3) = -24$, $f(4{,}5) = 42{,}562\,5$. Znaménka těchto čísel jsou opačná a můžeme použít metody tětiv. Určíme znaménko druhé derivace funkce $f(x)$ v intervalu $\langle 3;\ 4{,}5\rangle$.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 11x - 12 \\ f'(x) &= 4x^3 - 12x^2 - 4x + 11 \\ f''(x) &= 12x^2 - 24x - 4 \end{aligned}$$

Toto znaménko je v intervalu $\langle 3;\ 4{,}5\rangle$ zřejmě kladné, a tedy $f(4{,}5) \,.\, f''(x) > 0$ a použijeme vzorce (8b), tj.

$$x_i = \frac{x_{i-1}f(4{,}5) - 4{,}5 \,.\, f(x_{i-1})}{f(4{,}5) - f(x_{i-1})}, \quad x_0 = 3$$

čili

$$x_i = \frac{42{,}562\,5\,x_{i-1} - 4{,}5\,.\,f(x_{i-1})}{42{,}562\,5 - f(x_{i-1})}, \quad x_0 = 3.$$

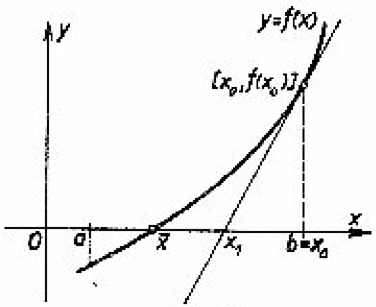
Výsledky jsou přehledně sepsány v následující tabulce.

i	x_i	$f(x_i)$
0	3	−24
1	3,540 845	−18,509 432
2	3,831 542	− 8,690 192
3	3,944 883	− 3,114 159
4	3,982 730	− 1,005 276
5	3,994 665	− 0,313 448
6	3,999 410	

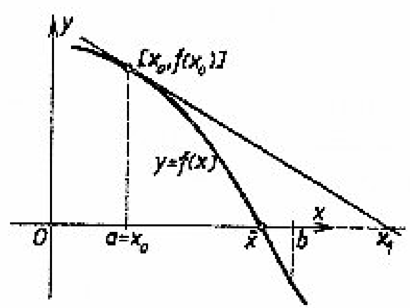
Kořen x je tedy přibližně roven číslu 3,99.

B. METODA TEČEN (Newtonova metoda)

Při zpřesňování kořene metodou tečen nahrazujeme graf funkce $f(x)$ v blízkosti kořene tečnou. Považujeme jeden z krajních bodů intervalu



Obr. 15



Obr. 16

$\langle a, b\rangle$, který jsme získali při separování, za počáteční aproximaci x_0 kořene x. Bodem o souřadnicích $[x_0, f(x_0)]$ vedeme tečnu ke grafu funkce $f(x)$ (obr. 15). Určíme rovnici $y = kx + q$ této tečny. Směrnice k je

(jak víte z matematiky) rovna číslu $f'(x_0)$ a absolutní člen určíme z podmínky, že tečna prochází bodem o souřadnicích $[x_0, f(x_0)]$, tj.

$$f(x_0) = f'(x_0)\,x_0 + q \quad \text{čili} \quad q = f(x_0) - f'(x_0)\,.\,x_0.$$

Rovnice hledané tečny je tedy

$$y = f'(x_0)\,x + f(x_0) - f'(x_0)\,x_0 = \varphi(x).$$

Místo rovnice $f(x) = 0$ nyní řešíme rovnici $\varphi(x) = 0$ a její řešení, tj. souřadnici průsečíku uvažované tečny s osou x (obr. 15), považujeme za další aproximaci x_1 hledaného kořene $\bar{x}$. Rovnice $\varphi(x) = f'(x_0)\,x + f(x_0) - f'(x_0)\,x_0 = 0$ je lineární a její řešení je

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Při dalším zpřesňování vedeme tečnu bodem o souřadnicích $[x_1, f(x_1)]$. Tím získáme další aproximaci

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

a stejným způsobem pokračujeme i dále. Celý postup tedy můžeme zapsat vzorcem

$$x_i = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{f'(x_{i-1})}, \tag{9}$$

kde buď $x_0 = a$, nebo $x_0 = b$.

Získaný vzorec (9) dává obvykle různá čísla pro $x_0 = a$ a $x_0 = b$, přičemž další aproximace se mohou nalézat i vně intervalu $\langle a, b\rangle$ (obr. 16). Proto je třeba výchozí aproximaci x_0 volit tak blízko kořenu $\bar{x}$, aby tato nepříjemná situace nemohla vzniknout. Z obrázků 17a), b), c), d) je patrné, že tato situace nemůže nastat, jestliže druhá derivace $f''(x)$ levé strany rovnice nemění znaménko v intervalu $\langle a, b\rangle$ a jestliže za počáteční aproximaci x_0 zvolíme ten krajní bod intervalu $\langle a, b\rangle$, v kterém jsou znaménka $f(x_0), f''(x)$ stejná. Aproximace x_1 se bude v tomto případě nacházet v intervalu $\langle a, b\rangle$, a to na té straně od kořene $\bar{x}$, na které se nachází aproximace x_0.

Příklad 13. Pro srovnání s metodou tětiv hledejme opět kořen rovnice

$$x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 11x - 12 = 0$$

z příkladu 12, ležící v intervalu $\langle 3; 4{,}5\rangle$.

Abychom mohli porovnat účinnost obou metod, začneme proces aproximací $x_0 = 3{,}540\,845$ získanou v příkladu 12.

$$f(x) = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 11x - 12$$
$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 - 4x + 11$$

Výsledky získané pomocí vzorce (9) zapíšeme do následující tabulky:

i	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$
0	3,540 845	−18,509 436	23,960 176
1	4,313 353	23,383 431	99,486 390
2	4,078 312	4,908 319	66,427 404
3	4,004 422	0,261 804	59,407 527
4	4,000 015	0,000 885	59,001 380
5	4,000 000		

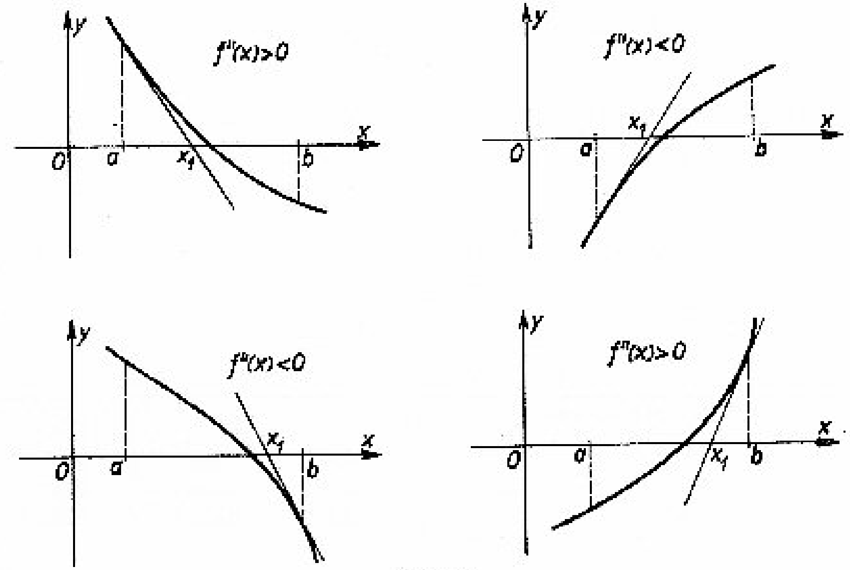
Dosazením do dané rovnice se přesvědčíme, že číslo $\bar{x} = 4$ je jejím kořenem. Pro porovnání uvedeme ještě následující tabulku, z které je zřejmo, jak se postupně vypočítané aproximace liší od přesné hodnoty kořene $x = 4$ u metody tětiv a u metody tečen.

i	Metoda tětiv		Metoda tečen	
	x_i	$\lvert\bar{x} - x_i\rvert$	x_i	$\lvert\bar{x} - x_i\rvert$
0	3,540 845	0,459 155	3,540 845	0,459 155
1	3,831 542	0,168 458	4,313 353	0,313 353
2	3,944 883	0,055 117	4,078 312	0,078 312
3	3,982 730	0,017 270	4,004 422	0,004 422
4	3,994 665	0,005 335	4,000 015	0,000 015
5	3,999 410	0,000 590	4,000 000	0,000 000

Z tabulky vidíme, že v tomto případě se aproximace vypočítané metodou tečen blíží ke kořenu $\bar{x} = 4$ podstatně rychleji, než aproximace vypočítané metodou tětiv.

C. KOMBINOVANÁ METODA TĚTIV A TEČEN

V některých případech je velmi výhodné současné použití metody tětiv a metody tečen. Nemění-li např. druhá derivace $f''(x)$ levé strany rovnice v intervalu $\langle a, b\rangle$ znaménko, zjistíme porovnáním obr. 14 a obr. 17, že aproximace získané metodou tětiv se blíží k hledanému kořenu z opačné strany než aproximace získané metodou tečen. Tato skutečnost nám umožňuje pohodlně a jednoduše určovat průběžně i chybu jednotlivých aproximací.



Obr. 17

Abychom mohli snadno určit vzorce pro tento postup, vzpomeneme si, že metodou tečen se blížíme ke kořenu $\bar{x}$ z té strany, na které má druhá derivace $f''(x)$ stejné znaménko jako funkce $f(x)$. To znamená, že krajní body intervalů $\langle a_i, b_i\rangle$ určíme podle vzorců

$$a_i = \frac{a_{i-1}f(b_{i-1}) - b_{i-1}f(a_{i-1})}{f(b_{i-1}) - f(a_{i-1})}, \quad a_0 = a, \quad b_0 = b, \qquad (10a)$$

$$b_i = b_1 - \frac{f(b_{i-1})}{f'(b_{i-1})},$$

je-li $f(b)f''(b) > 0$, nebo

$$a_i = a_{i-1} - \frac{f(a_{i-1})}{f'(a_{i-1})}, \quad a_0 = a, \tag{10b}$$

$$b_i = \frac{a_{i-1}f(b_{i-1}) - b_{i-1}f(a_{i-1})}{f(b_{i-1}) - f(a_{i-1})}, \quad b_0 = b,$$

je-li $f(a) \cdot f''(a) < 0$.

Jakým způsobem lze přehledně celý postup zapsat do tabulky, bude patrné z následujícího příkladu.

Příklad 14. Určíme kořen rovnice z příkladu 11, tj. rovnice

$$x^3 - x - 1 = 0$$

ležící v intervalu $\langle 1, 2\rangle$ s chybou nepřevyšující 0,000 1.

$$f(x) = x^3 - x - 1, \quad f(1) = -1, \quad f(2) = 5 > 0,$$
$$f'(x) = 3x^2 - 1, \quad f''(x) = 6x, \quad f''(2) = 12 > 0.$$

Vidíme, že $f(2)f''(2) > 0$ a krajní body intervalu $\langle a_i, b_i\rangle$ budeme určovat ze vzorců (10a). Postup zapíšeme do následující tabulky:

i	$\langle a_i, b_i\rangle$	$\frac{1}{2}(b_i - a_i)$	$f(a_i)$	$f(b_i)$	$f'(b_i)$
0	⟨1; 2⟩	1	−1	5	11
1	⟨1,1; 1,6⟩	0,25	−0,769	1,496	6,68
2	⟨1,26; 1,38⟩	0,06	−0,259 6	0,248 1	4,507 7
3	⟨1,32; 1,33⟩	0,005	−0,020 0	0,022 6	4,306 7
4	⟨1,324 6; 1,324 8⟩	0,000 1			

Odtud pak $\bar{x} = 1{,}324\,7 \pm 0{,}000\,1$.
Abychom při zužování intervalů nepřekročili kořen $\bar{x}$, zaokrouhlujeme čísla a_i sestupně a čísla b_i vzestupně.

CVIČENÍ

9. Určete kořeny následujících rovnic s chybou nepřevyšující 0,005.

a) $x^3 + 2x - 8 = 0$ b) $x^3 - 2x - 5 = 0$
c) $\cos x = x^2$ d) $x^3 + 3x - 1 = 0$

10. Určete s třemi platnými desetinnými místy kořeny rovnic:

a) $x^3 + 2x - 11 = 0$ b) $x^3 + x + 1 = 0$
c) $x^3 - 2x + 2 = 0$ d) $x^3 + x - 3 = 0$
e) $x^3 - 2x - 5 = 0$ f) $x^3 - x + 2 = 0$
g) $x^3 - x + 1 = 0$ h) $x^3 + x - 1 = 0$

11. Metodou tětiv určete s přesností na tři desetinná místa kořen rovnice $x^4 - 2x^2 - 4 = 0$ ležící v intervalu $\langle 1; 1{,}5\rangle$ a všechny kořeny rovnice $x^3 + 3x^2 - 3 = 0$.

12. Určete kořen rovnice $x^3 + 5x^2 - 15x - 7 = 0$ ležící v intervalu $\langle 2{,}4; 2{,}5\rangle$ s chybou nepřevyšující 0,000 005.

V. Numerická integrace

V matematice jste se setkali s pojmem určitého integrálu, s jeho geometrickým významem a se způsobem výpočtu pomocí primitivní funkce, tj. vzorcem

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a), \tag{1}$$

kde

$$F'(x) = f(x).$$

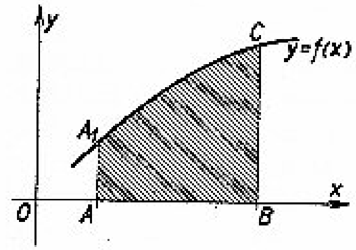
Pro mnoho funkcí tohoto způsobu však nelze prakticky použít, buď proto, že primitivní funkci $F(x)$ neumíme vyjádřit pomocí nám známých funkcí, anebo proto, že takové vyjádření je příliš složité. V takových případech musíme použít přibližných metod integrace. S několika takovými metodami se nyní seznámíme.

1. OBDÉLNÍKOVÁ METODA

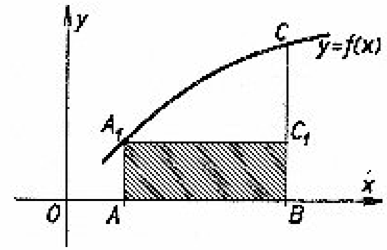
Nejdříve připomeneme geometrický význam určitého integrálu. Nechť např. funkce $f(x)$ je spojitá a nezáporná v intervalu $\langle a, b\rangle$. Pak, jak jste si ukázali v hodinách matematiky, integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ vyjadřuje velikost plochy omezené grafem funkce $f(x)$, osou x a úsečkami spojujícími body $A = [a, 0]$, $A_1 = [a, f(a)]$ a body $B = [b, 0]$, $C = [b, f(b)]$ (obr. 18).

Nahradíme nyní graf funkce $f(x)$ v intervalu $\langle a, b\rangle$ úsečkou rovnoběžnou s osou x ve vzdálenosti $f(a)$ od osy x a za přibližnou hodnotu integrálu $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ vezmeme plochu obdélníka, AA_1C_1B, která je rovna číslu $(b - a) \cdot f(a)$. Získáme tak vzorec

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \doteq (b - a) \cdot f(a). \tag{2}$$

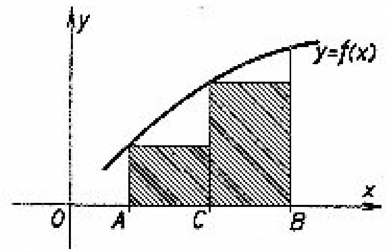


Obr. 18



Obr. 19

Chyba, které se přitom dopustíme, může být, jak vidíme z obrázku 19, značně velká a závisí podstatně na délce intervalu $\langle a, b\rangle$. Chceme-li tuto chybu zmenšit, postupujeme následujícím způsobem. Rozdělíme (např. rozpůlíme) interval $\langle a, b\rangle$ dělicím bodem c a na obou takto vzniklých intervalech $\langle a, c\rangle$, $\langle c, b\rangle$ nahradíme funkci $f(x)$ úsečkou tak, jak jsme ji nahrazovali na intervalu $\langle a, b\rangle$. Vzniknou tak dva obdélníky (obr. 20) a součet jejich ploch vyjadřuje přibližně hodnotu daného



Obr. 20

určitého integrálu. Získáme tak přibližný vzorec

$$\int_a^b f(x)\,dx \doteq (c-a)f(a) + (b-c)f(c) \qquad (3)$$

a jestliže dělicí bod c půlil interval $\langle a, b\rangle$, tj. $c - a = b - c = \frac{1}{2}(b-a)$, přejde vzorec (3) ve vzorec

$$\int_a^b f(x)\,dx \doteq \frac{b-a}{2}\,[f(a) + f(c)]. \qquad (4)$$

Potřebujeme-li znát určitý integrál ještě přesněji, dělíme interval $\langle a, b\rangle$ na více částí (zpravidla na stejně velké části) a na takto vzniklých intervalech nahradíme funkci opět úsečkami stejným způsobem jako v předchozích případech a sečteme plochy takto vzniklých obdélníků. Abychom mohli pohodlně vyjádřit příslušný přibližný vzorec, budeme dělit interval $\langle a, b\rangle$ na n stejných částí a zavedeme si toto označení. Dělíme-li interval $\langle a, b\rangle$ na n stejných částí, potřebujeme k tomu $n-1$ dělicích bodů. Jejich první souřadnice označíme $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ a krajní body intervalu $\langle a, b\rangle$ označíme x_0, x_n. Odpovídající funkční hodnoty $f(x_i)$ označíme, podobně jako při interpolaci, symboly f_i. Příslušný přibližný vzorec pak bude

$$\int_a^b f(x)\,dx \doteq (x_1 - x_0)f_0 + (x_2 - x_1)f_1 + \ldots + (x_n - x_{n-1})f_{n-1}$$

a protože jsme interval $\langle a, b\rangle$ dělili na stejné části, tj.

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \ldots = x_n - x_{n-1} = \frac{b-a}{n},$$

bude nakonec

$$\int_a^b f(x)\,dx \doteq \frac{b-a}{n}(f_0 + f_1 + \ldots + f_{n-1}). \qquad (5)$$

Pro $n = 1$ a $n = 2$ dostáváme zřejmě vzorec (2) a (4).

Kdybychom za výšky obdélníků na jednotlivých intervalech $\langle x_i, x_{i+1}\rangle$ nebrali čísla $f(x_i)$, ale čísla $f(x_{i+1})$, dospěli bychom k jinému vzorci.

Sami se přesvědčte o tom, že tento vzorec bude

$$\int_a^b f(x)\,dx \doteq \frac{b-a}{n}(f_1 + f_2 + \ldots + f_n). \qquad (6)$$

Způsob výpočtu přibližné hodnoty integrálu $\int_a^b f(x)\,dx$ vyjádřený vzorcem (5) nebo (6) nazýváme ze zřejmých důvodů **obdélníkovou metodou.** Obdélníkové metody se v praxi téměř nepoužívá, protože existují jiné metody, stejně jednoduché a přitom dávající při stejném n zpravidla mnohem přesnější výsledky. Jen pro ilustraci spočteme integrál $\int_0^1 (x^2 + 1)\,dx$ (jehož přesná hodnota je $\frac{4}{3} \doteq 1{,}333$), a to pro $n = 10$ a $n = 20$. Volíme nejprve $x_0 = 0$; $x_1 = 0{,}1$; $x_2 = 0{,}2$; …; $x_9 = 0{,}9$; $x_{10} = 1$:

i	x_i	$f_i = x_i^2 + 1$
0	0,0	1,00
1	0,1	1,01
2	0,2	1,04
3	0,3	1,09
4	0,4	1,16
5	0,5	1,25
6	0,6	1,36
7	0,7	1,49
8	0,8	1,64
9	0,9	1,81

$$\int_0^1 (x^2 + 1)\,dx \doteq \frac{1-0}{10}(f_0 + f_1 + \ldots + f_9) = \frac{1}{10} \cdot 12{,}85 = 1{,}285.$$

Volíme-li $x_0 = 0$; $x_1 = 0{,}05$; $x_2 = 0{,}10$; …; $x_{19} = 0{,}95$; $x_{20} = 1$, získáme:

i	x_i	f_i
0	0,00	1,000 0
1	0,05	1,002 5
2	0,10	1,010 0
3	0,15	1,022 5
4	0,20	1,040 0
5	0,25	1,062 5
6	0,30	1,090 0
7	0,35	1,122 5
8	0,40	1,160 0
9	0,45	1,202 5
10	0,50	1,250 0
11	0,55	1,302 5
12	0,60	1,360 0
13	0,65	1,422 5
14	0,70	1,490 0
15	0,75	1,562 5
16	0,80	1,640 0
17	0,85	1,722 5
18	0,90	1,810 0
19	0,95	1,902 5
		26,175 0

$$\int_0^1 (x^2+1)\,\mathrm{d}x \doteq \frac{1-0}{20}(f_0+f_1+\ldots+f_{19}) = \frac{1}{20}\,.\,26{,}175\,0 \doteq 1{,}309.$$

2. LICHOBĚŽNÍKOVÁ METODA

Vzorec (2), který je základem obdélníkové metody, jsme mohli odvodit také takto. V intervalu $\langle a, b\rangle$ nahradíme funkci $f(x)$ jinou funkcí $\varphi(x)$, a to konstantou $f(a)$, tj. $\varphi(x) = f(a)$. Nyní místo integrálu $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ vypočteme integrál $\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x$, který dovedeme určit pomocí primitivní

funkce, a hodnotu tohoto integrálu budeme považovat za přibližnou hodnotu původního integrálu, tj.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \doteq \int_a^b f(a)\,\mathrm{d}x = [f(a)\,.\,x]_a^b = f(a)\,.\,b - f(a)\,.\,a = (b-a)\,f(a).$$

Pochopitelně očekáváme, že integrál $\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x$ bude vyjadřovat integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ tím přesněji, čím přesněji bude funkce $\varphi(x)$ aproximovat funkci $f(x)$. Všimneme-li si, že konstanta je mnohočlenem nultého stupně, můžeme říci, že jsme funkci $f(x)$ aproximovali mnohočlenem nultého stupně.

Lichoběžníková metoda spočívá na rozdíl od obdélníkové metody v aproximaci funkce $f(x)$ mnohočlenem prvého stupně. Nahradíme v intervalu $\langle a, b\rangle$ funkci $f(x)$ lineárním interpolačním mnohočlenem s uzly a, b. Určeme např. Newtonův interpolační mnohočlen.

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$
a	$f(a)$	$f(b) - f(a)$
b	$f(b)$	

$$N_1(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

Místo integrálu $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ vypočteme integrál $\int_a^b N_1(x)\,\mathrm{d}x$.

$$\int_a^b N_1(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \left[f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right]\mathrm{d}x = f(a)\int_a^b \mathrm{d}x +$$

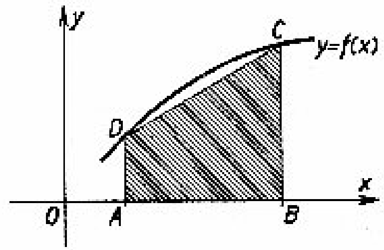
$$+ \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\int_a^b (x-a)\,\mathrm{d}x = f(a)(b-a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,.\,\frac{1}{2}(b-a)^2 =$$

$$= (b-a)\left(f(a) + \frac{1}{2}f(b) - \frac{1}{2}f(a)\right) = (b-a)\left(\frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{2}f(b)\right).$$

Získáme tak vzorec

$$\int_a^b f(x)\,dx \doteq (b-a)\left[\frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{2}f(b)\right]. \tag{7}$$

Grafem funkce $\varphi(x)$ je přímka procházející body $[a, f(a)]$, $[b, f(b)]$. Z obr. 21 je patrno, že nyní plochu určenou integrálem $\int_a^b f(x)\,dx$ nahrazujeme plochou lichoběžníka $ABCD$; proto se tato metoda nazývá lichoběžníková.



Obr. 21

Chceme-li najít hodnotu integrálu $\int_a^b f(x)\,dx$ přesněji, rozdělíme, podobně jako při obdélníkové metodě, interval $\langle a, b\rangle$ dělicím bodem c a v každém z obou vzniklých intervalů $\langle a, c\rangle$, $\langle c, b\rangle$ užijeme vzorce (7). Dostaneme

$$\int_a^b f(x)\,dx \doteq (c-a)\left[\frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{2}f(c)\right] + (b-c)\left[\frac{1}{2}f(c) + \frac{1}{2}f(b)\right]$$

a jestliže bod c půlí interval $\langle a, b\rangle$, tj. $c - a = b - c = \dfrac{b-a}{2}$, dostaneme

$$\int_a^b f(x)\,dx \doteq \frac{b-a}{2}\left[\frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{2}f(c)\right] + \frac{b-a}{2}\left[\frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{2}f(b)\right] =$$

$$= \frac{b-a}{2}\left[\frac{1}{2}f(a) + f(c) + \frac{1}{2}f(b)\right].$$

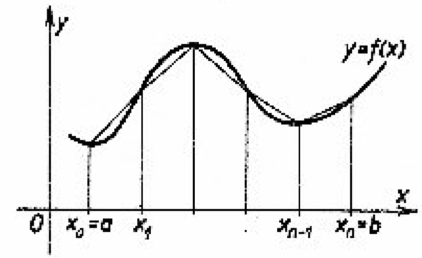
Dělíme-li interval $\langle a, b\rangle$ na n stejných částí, získáme vzorec

$$\int_a^b f(x)\,dx \doteq \frac{b-a}{n}\left[\frac{1}{2}f_0 + f_1 + f_2 + \ldots + f_{n-1} + \frac{1}{2}f_n\right], \tag{8}$$

kde jsme použili stejného označení jako ve vzorci (5), (6) (viz obr. 22).

Chybu, které se dopouštíme při lichoběžníkové metodě, odhadujeme číslem

$$\frac{(b-a)^3}{12n^2}\,.\,M_2, \tag{9}$$



Obr. 22

kde M_2 je maximum absolutní hodnoty druhé derivace $f''(x)$ v intervalu $\langle a, b\rangle$, nebo pomocí tabulky konečných diferencí sestrojené v intervalu $\langle a, b\rangle$ s krokem $h = \dfrac{b-a}{n}$, číslem

$$\frac{b-a}{12}\,.\,\overline{M}_2, \tag{10}$$

kde $\overline{M}_2$ je největší (v absolutní hodnotě) z diferencí druhého řádu.

Příklad 2. Lichoběžníkovou metodou vypočteme integrál

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

s chybou nepřevyšující 0,005.

Abychom určili počet dílů, na které rozdělíme interval $\langle a, b\rangle$, čili abychom určili krok, s jakým sestrojíme tabulku funkce $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, odhadneme nejprve chybu pomocí čísla (9):

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

$$f''(x) = -2\frac{1-3x^2}{(1+x^2)^3}$$

V intervalu $\langle 0,1\rangle$ bude

$$|f''(x)| = \left|-2\frac{1-3x^2}{(1+x^2)^3}\right| < 2\,|1-3x^2| \leqq 4.$$

Protože chyba nemá být větší než 0,005, získáme pro počet dílů vztah

$$\frac{1}{12n^2}\cdot 4 \leqq 0{,}005 \quad \text{čili} \quad n^2 \geqq \frac{200}{3}.$$

Volme např. $n = 10$. Abychom mohli použít vzorce (8), sestavíme nejprve tabulku funkce $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ v intervalu $\langle 0,1\rangle$ s krokem $h = \dfrac{1-0}{10} = 0{,}1$.

i	x_i	$1+x_i^2$	$\frac{1}{1+x_i^2}$
0	0	1,00	1,000
1	0,1	1,01	0,990
2	0,2	1,04	0,962
3	0,3	1,09	0,917
4	0,4	1,16	0,862
5	0,5	1,25	0,800
6	0,6	1,36	0,735
7	0,7	1,49	0,671
8	0,8	1,64	0,610
9	0,9	1,81	0,552
10	1,0	2,00	0,500

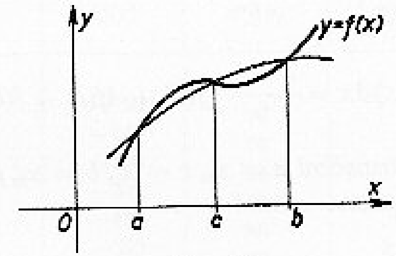
Odtud podle vzorce (8) dostaneme

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \doteq 0{,}785.$$

Přesná hodnota tohoto integrálu je rovna $\dfrac{\pi}{4}$.

3. SIMPSONOVA METODA (METODA PARABOL)

Vzorec, který si nyní odvodíme, spočívá v nahrazení funkce $f(x)$ v intervalu $\langle a, b\rangle$ interpolačním mnohočlenem druhého stupně, tj. parabolou (obr. 23). Abychom mohli určit interpolační mnohočlen druhého stupně, potřebujeme znát kromě hodnot funkce $f(x)$ v krajních



Obr. 23

bodech intervalu ještě hodnotu funkce $f(x)$ v dalším bodě. Za tento bod zvolíme střed intervalu $\langle a, b\rangle$, tj. bod $c = \dfrac{a+b}{2}$. Určíme opět Newtonův interpolační mnohočlen.

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$
a	$f(a)$		
		$f(c) - f(a)$	
c	$f(c)$		$f(b) - 2f(c) + f(a)$
		$f(b) - f(c)$	
b	$f(b)$		

$$N_2(x) = f(a) + \frac{f(c)-f(a)}{h}(x-a) + \frac{f(b)-2f(c)+f(a)}{2h^2}(x-a)(x-c),$$

kde $h = \dfrac{b-a}{2}$.

Místo integrálu $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ spočteme integrál $\int_a^b N_2(x)\,\mathrm{d}x$.

$$\int_a^b N_2(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \Big[f(a) + \frac{f(c)-f(a)}{h}(x-a) +$$

$$+ \frac{f(b)-2f(c)+f(a)}{2h^2}(x-a)(x-c)\Big]\,\mathrm{d}x = \frac{b-a}{6}[f(a)+4f(c)+f(b)].$$

Dostaneme vzorec

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \doteq \frac{b-a}{6}[f(a)+4f(c)+f(b)]. \tag{11}$$

Zavedeme-li si opět označení $a = x_0$, $c = x_1$, $b = x_2$, $f(x_i) = f_i$, můžeme tento vzorec zapsat takto:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \doteq \frac{b-a}{6}[f_0 + 4f_1 + f_2].$$

Při zvětšování přesnosti dělíme interval $\langle a, b\rangle$ na sudý počet stejných částí — řekněme na $2n$ částí — a postupně použijeme vzorce (11). Dostaneme tak vzorec

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \doteq \frac{b-a}{6n}[f_0+4f_1+f_2] + \frac{b-a}{6n}[f_2+4f_3+f_4] + \ldots$$

$$\ldots + \frac{b-a}{6n}[f_{2n-2}+4f_{2n-1}+f_{2n}] = \tag{12}$$

$$= \frac{b-a}{6n}[f_0+4f_1+2f_2+4f_3+\ldots+2f_{2n-2}+4f_{2n-1}+f_{2n}].$$

Tento vzorec nazýváme **Simpsonovým vzorcem.**

Chybu Simpsonovy metody odhadujeme číslem

$$\frac{(b-a)^5}{180\,(2n)^4}M_4 \tag{13}$$

nebo číslem

$$\frac{b-a}{180}\overline{M}_4, \tag{14}$$

kde M_4 je maximum absolutní hodnoty čtvrté derivace funkce $f(x)$ v intervalu $\langle a, b\rangle$ a $\overline{M}_4$ největší (v absolutní hodnotě) z konečných diferencí čtvrtého řádu v tabulce s krokem $h = \dfrac{b-a}{2n}$.

Příklad 3. Najdeme přibližnou hodnotu integrálu $\int_0^{0,8} f(x)\,\mathrm{d}x$, kde funkce $f(x)$ je dána tabulkou:

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$
0,0	1,000 0				
		−50			
0,1	0,995 0		99		
		−149		0	
0,2	0,980 1		99		−5
		−248		−5	
0,3	0,955 3		94		4
		−342		−1	
0,4	0,921 1		93		−4
		−435		−5	
0,5	0,877 6		88		−1
		−523		−6	
0,6	0,825 3		82		0
		−605		−6	
0,7	0,764 8		76		
		−681			
0,8	0,696 7				

V tomto případě je počet částí intervalu $\langle 0; 0,8\rangle$, a tedy i krok $h = \dfrac{b-a}{2n}$, určen krokem tabulky. Při použití vzorce (12) je vhodné uspořádat funkční hodnoty do následujícího schématu:

i	x_i	f_i: $i = 0, i = 8$	f_i: lichá i	f_i: sudá i
0	0	1,000 0		
1	0,1		0,995 0	
2	0,2			0,980 1
3	0,3		0,955 3	
4	0,4			0,921 1
5	0,5		0,877 6	
6	0,6			0,825 3
7	0,7		0,764 8	
8	0,8	0,696 7		
Součet		1,696 7	3,592 7	2,726 5

Podle vzorce (12) pak dostaneme

$$\int_0^{0,8} f(x)\,dx \doteq \frac{0,8}{24}(1,696\,7 + 4\,.\,3,592\,7 + 2\,.\,2,726\,5) = 0,717\,4.$$

Odhadneme-li chybu číslem (14), zjistíme, že je prakticky zanedbatelná ve srovnání s chybou funkčních hodnot (předpokládáme, že funkční hodnoty jsou zapsány platnými číslicemi), a tím spíše i ve srovnání s chybou součtů násobků funkčních hodnot, které jsme použili při výpočtu daného integrálu.

CVIČENÍ

1. Lichoběžníkovou metodou určete integrál

$$\int_1^5 \frac{dx}{x};$$

zvolte $n = 4$.

2. Simpsonovou metodou určete integrál

$$\int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2};$$

zvolte $2n = 4$ a odhadněte chybu.

3. Lichoběžníkovou metodou vypočtěte integrál

$$\int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2};$$

použijte vzorce pro $n = 8$.

4. Integrál z předchozího příkladu vypočtěte podle Simpsonova vzorce pro $2n = 8$.

5. Určete integrály

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1 + x}$, b) $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{1 + x}$

s chybou nepřevyšující 0,000 5.

6. Lichoběžníkovou a Simpsonovou metodou určete integrál

$$\int_0^4 f(x)\,dx,$$

kde funkce $f(x)$ je dána tabulkou

x	$f(x)$
0,0	1,000 0
0,5	1,648 7
1,0	2,718 3
1,5	4,481 7
2,0	7,389 1
2,5	12,182 5
3,0	20,085 5
3,5	33,115 5
4,0	54,598 2

a odhadněte v obou případech chybu použité metody.

VI. Logaritmické pravítko

1. LOGARITMICKÁ STUPNICE A LOGARITMICKÉ PRAVÍTKO

Nejdříve si zopakujeme některé závěry, ke kterým jste došli v algebře při probírání dekadických logaritmů.

1. **Každé číslo $N > 0$ můžeme zapsat ve tvaru**

$$N = N_0 10^n, \qquad (1)$$

kde $1 \leq N_0 < 10$ a n je číslo celé, které nazýváme **řádem** čísla N.
Např. $0{,}043 = 4{,}3 \,.\, 10^{-2}$; $3\,260 = 3{,}26 \,.\, 10^3$; $8{,}4 = 8{,}4 \,.\, 10^0$; $26 = 2{,}6 \,.\, 10^1$.

2. **Dekadický logaritmus** čísla N pak vyjádříme

$$\log N = n + \log N_0, \qquad (2)$$

kde řád čísla n je tzv. **charakteristika** a $n_0 = \log N_0$ je tzv. **mantisa** logaritmu čísla N.
Např. $\log 0{,}043 = -2 + \log 4{,}3$; $3\,260 = 3 + \log 3{,}26$.

3. **Máme-li dvě čísla $M > 0$, $N > 0$, kde podle** (1) $M = M_0 10^m$, $N = N_0 10^n$, **potom platí**

(a) $$\log (MN) = m + n + \log M_0 + \log N_0, \qquad (3)$$

(b) $$\log \frac{M}{N} = m - n + \log M_0 - \log N_0.$$

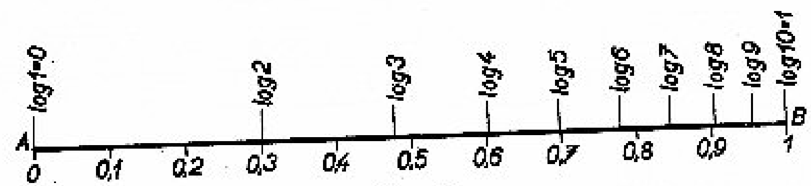
Např. $\log (0{,}043 \,.\, 3\,260) = -2 + 3 + \log 4{,}3 + \log 3{,}26$,

$$\log \frac{0{,}043}{3\,260} = -2 - 3 + \log 4{,}3 - \log 3{,}26.$$

Toho jste používali při násobení a dělení čísel pomocí logaritmických tabulek. Mantisy jste vyhledali v tabulkách a pomocí vztahů (3) jste vypočítali logaritmus součinu nebo podílu. Hledaný součin nebo podíl jste pak k tomuto logaritmu určili opět pomocí tabulek. Tím bylo násobení a dělení čísel převedeno na sčítání a odčítání charakteristik a mantis logaritmů těchto čísel.

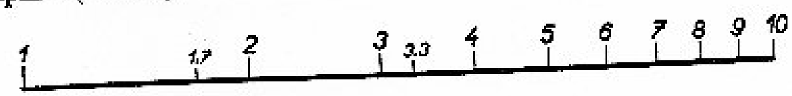
Sčítání a odčítání mantis můžeme provádět také graficky. Jestliže sestrojíme úsečky, jejichž délky jsou rovny mantisám $\log M_0$, $\log N_0$, bude součet těchto úseček mít velikost $\log (M_0 N_0)$ a jejich rozdíl $\log \dfrac{M_0}{N_0}$.

V praxi se grafické sčítání a odčítání mantis provádí pomocí **logaritmických stupnic** na logaritmickém pravítku. K násobení a dělení budeme používat stupnic, které jsou na pravítku označeny X, X_Z. K výpočtům nám postačí logaritmická stupnice od $\log 1 = 0$ po $\log 10 = 1$, tj. stupnice mantis. Sestrojíme ji tak, že na číselnou osu naneseme v jednotkách AB dekadické logaritmy čísel od 1 do 10 (obr. 24).



Obr. 24

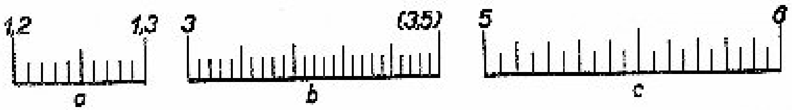
Protože nám jde o grafické sčítání mantis, nebudou nás zajímat číselné hodnoty příslušných mantis, ale úsečky, jejichž délky jsou rovny mantisám čísel 1 až 10. Proto vynecháme lineární stupnici a místo $\log N_0$ budeme k jednotlivým dílkům psát pouze N_0, tj. např. označíme $\log 1$ číslem 1, $\log 1{,}7$ číslem 1,7, $\log 2$ číslem 2 atd. Dostaneme logaritmickou stupnici (obr. 25).



Obr. 25

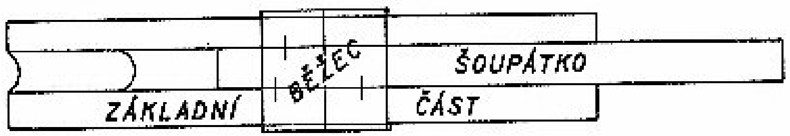
Vidíme, že přírůstek mantis $\log N_0$ se s rostoucím N_0 zmenšuje, proto podrobnější dělení nemůže být provedeno po celé délce stupnice stejným způsobem. Všimněte si na svém logaritmickém pravítku, že je použito trojího způsobu dělení:

a) nejmenší dílek určuje přírůstek 0,01 (obr. 26a),
b) nejmenší dílek určuje přírůstek 0,02 (obr. 26b),
c) nejmenší dílek určuje přírůstek 0,05 (obr. 26c).



Obr. 26

Části logaritmického pravítka (běžné konstrukce) znázorňuje obr. 27.



Obr. 27

Na základní části a šoupátku jsou kromě logaritmických stupnic X, X_Z obvykle ještě další stupnice:

X^2, X_Z^2	— kvadratická stupnice pro určování druhých mocnin,
X^3	— kubická stupnice pro určování třetích mocnin,
$\frac{1}{X}$	— reciproká stupnice pro určování převrácených hodnot,
∢ sin, ∢ tg	— goniometrické stupnice pro určování hodnot goniometrických funkcí,

a některé další stupnice, jejichž použití je vždy podrobně popsáno v příslušném návodu.

2. VÝPOČTY NA LOGARITMICKÉM PRAVÍTKU

Násobení

Příklad 1. Vypočítejte součin 3 120 . 0,198.
Označíme-li první činitel M a druhý N, můžeme podle (1) psát

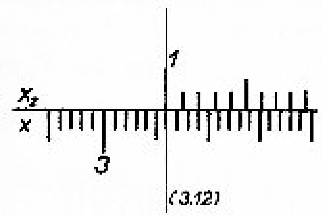
$$M = M_0 . 10^m = 3,12 . 10^3, N = N_0 . 10^n = 1,98 . 10^{-1},$$

takže pro součin $K = MN$ platí podle (3)

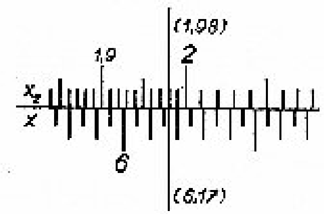
$$\log K = m + n + \log M_0 + \log N_0 = 3 - 1 + \log 3,12 + \log 1,98.$$

Pomocí logaritmického pravítka graficky sečteme mantisy log 3,12 + + log 1,98. Budeme postupovat takto:

Úsečka od 1 do 3,12 na stupnici X má v jednotkách AB délku log 3,12. K rysce 3,12 na této stupnici přisuneme rysku 1 stupnice X_Z (obr. 28a), která bude počátkem druhé přičítané úsečky délky log 1,98. Koncovým bodem této úsečky je ryska 1,98 na stupnici X_Z, která je současně koncovým bodem součtu úseček log 3,12 + log 1,98. Pod ryskou 1,98 stupnice X_z je na stupnici X číslo $K_0 = M_0N_0 = 3,12 . 1,98$. Abychom



Obr. 28a



Obr. 28b

mohli snadněji přečíst výsledek, můžeme si tuto rysku zachytit pomocí jezdce (obr. 28b). Odhadneme-li třetí cifru, máme $K_0 = 6,17$. Řád výsledku je $k = m + n = 3 - 1 = 2$, takže $K = K_0 . 10^n = 6,17 . 10^2$,

$$3\,120 . 0,198 = 617.$$

Příklad 2. Vypočítejte součin 4 650 . 610.
Použijeme stejného označení jako v předchozím příkladu, takže $M = 4,65 . 10^3$; $N = 6,1 . 10^2$. Kdybychom chtěli použít stejného postupu jako v příkladu 1, zjistili bychom při hledání výsledku, že ryska 6,1

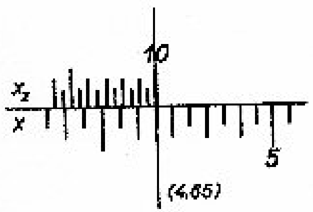
stupnice X_Z je mimo logaritmické pravítko. Je to tím, že $M_0N_0 = 4{,}65 \,.\, 6{,}1 > 10$, tj. $\log M_0 + \log N_0 > 1$. Proto si postup poněkud upravíme. Součin $K = M \,.\, N = M_0N_0 10^{m+n}$ napíšeme ve tvaru

$$K = \frac{M_0N_0}{10} 10^{m+n+1} = K_0 \,.\, 10^{m+n+1},\ 1 \leqq K_0 < 10.$$

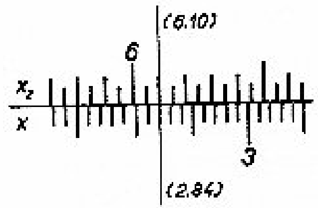
Potom je

$$\log K = m + n + 1 + \log M_0 - \log 10 + \log N_0 = 6 + \log 4{,}65 - \log 10 + \log 6{,}1.$$

Odečíst graficky $\log 10 = 1$ znamená posunout šoupátko o celou délku doleva, takže k rysce 4,65 stupnice X nebudeme přisunovat rysku 1



Obr. 29a



Obr. 29b

stupnice X_z jako v příkladu 1, ale rysku 10 (obr. 29a). Výsledné $K_0 = \frac{M_0N_0}{10}$ pak hledáme opět na stupnici X pod ryskou 6,1 stupnice X_Z (obr. 29b).

$$K_0 = 2{,}84,\ k = m + n + 1 = 3 + 2 + 1 = 6,$$

takže

$$4\,650 \,.\, 610 = 2{,}84 \,.\, 10^6 = 2\,840\,000.$$

Postup při násobení můžeme obecně vyjádřit takto:

Pravidlo 1. Na stupnici X vyhledáme číslo, které má stejné číslice jako první činitel, a přisuneme k němu 1 nebo 10 stupnice X_Z. Potom na stupnici vyhledáme číslo, jehož číslice jsou stejné jako číslice druhého činitele. Toto číslo zachytíme pomocí jezdce. Číslice výsledku pak čteme na stupnici X. Jestliže jsme přisunuli druhý činitel pomocí rysky 1 stupnice X_z, je řád součinu roven součtu řádů činitelů. Při použití rysky 10 je řád součinu o 1 větší než součet řádů činitelů.

Příklad 3. Vypočítejte součin 206 . 0,715 . 5 250 . 0,044 5.

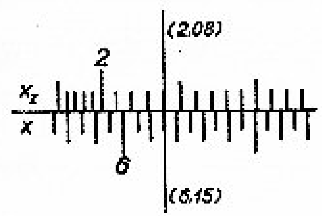
K číslu 2,06 stupnice X přisuneme 10 stupnice X_Z. Rysku jezdce nastavíme na 7,15 stupnice X_z. Výsledek však neodečítáme, ale pokračujeme v násobení tak, že šoupátkem přisuneme k této rysce rysku 1 stupnice X_z a jezdec nastavíme na 5,250. Výsledek opět neodečítáme, ale pokračujeme v násobení 4,45. Podobně bychom pokračovali i při vyšším počtu činitelů. Výsledek posledního násobení je 3,44. Ještě však musíme určit řád. Jelikož jsme při násobení čísly 7,15 a 4,45 použili rysky 10, bude řád o 2 větší než součet řádů činitelů, tedy $2 + (-1) + 3 + (-2) + 1 + 1 = 4$. Výsledek je

$$206 \,.\, 0{,}\overset{1}{7}15 \,.\, 5\,250 \,.\, 0{,}04\overset{1}{4}5 = 3{,}44 \,.\, 10^4 = 34\,400.$$

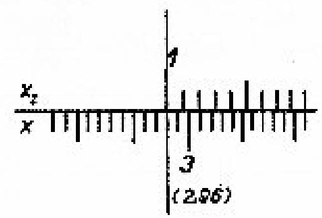
Dělení

Příklad 4. Vypočítejte 0,615 : 208.

Označíme opět $M = 0{,}615 = 6{,}15 \,.\, 10^{-1}$, $N = 208 = 2{,}8 \,.\, 10^2$. Nyní máme graficky odečíst mantisy $\log M_0 - \log N_0 = \log 6{,}15 - \log 2{,}08$. Ke koncovému bodu úsečky délky log 6,15, tj. k rysce 6,15 stupnice X, přisuneme koncový bod odečítané úsečky délky log 2,08, tj. rysku 2,08 stupnice X_Z (obr. 30a). Počátek úsečky log 2,08, tj. ryska 1 stupnice X_Z,



Obr. 30a



Obr. 30b

je potom totožný s koncovým bodem rozdílu $\log 6{,}15 - \log 2{,}8 = \log \frac{6{,}15}{2{,}8}$, takže $K_0 = \frac{6{,}15}{2{,}8}$ čteme na stupnici X pod ryskou 1 stupnice X_Z (obr. 30b). Je to číslo $K_0 = 2{,}96$.

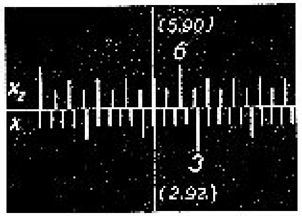
Řád určíme podle (3) jako $k = m - n = -1 - 2 = -3$,

takže

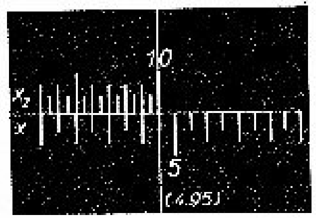
$$0{,}615 : 208 = 2{,}96 \,.\, 10^{-3} = 0{,}002\,96.$$

Příklad 5. Vypočítejte podíl 29,2 : 0,059.

Použijeme obdobného značení jako v předchozím příkladu. Přisuneme-li 5,9 stupnice X_Z k rysce 2,92 stupnice X (obr. 31a), podobně jako v příkladu 4, nemůžeme výsledek zjistit, neboť ryska 1 stupnice X_Z je mimo



Obr. 31a



Obr. 31b

logaritmické pravítko. Je to tím, že $K = \frac{M_0}{N_0} = \frac{2,92}{5,9} < 1$, čili $\log K_0 < 0$. Proto si podíl $K = \frac{M_0}{N_0} \, 10^{m-n}$ upravíme na tvar $K = \frac{10M_0}{N_0} \, . \, 10^{m-n-1} = K_0 \, . \, 10^{m-n-1}$, kde platí $1 \leqq K_0 < 10$. Pak ovšem je $\log \frac{M}{N} =$

$$= m - n - 1 + \log M_0 + \log 10 - \log N_0 = 2 + \log 2,92 + \log 10 - \log 5,9.$$

Přičtení $\log 10 = 1$ odpovídá posunutí šoupátka o celou délku doprava, takže výsledné $K_0 = \frac{10M_0}{N_0} = \frac{29,2}{5,9}$ budeme hledat pod ryskou 10 stupnice X_Z na stupnici X, a nikoli pod 1 jako v příkladu 4 (obr. 31b). Vidíme, že $K_0 = 4,95$.

Řád podílu je pak ovšem o 1 menší, tj. $k = m - n - 1 = 1 - (-2) - 1 = 2$, takže

$$29,2 : 0,059 = 4,95 \, . \, 10^2 = 495.$$

Postup při dělení můžeme obecně vyjádřit takto:

Pravidlo 2. Na stupnici X vyhledáme číslo, které má stejné číslice jako dělenec, a zachytíme jej ryskou jezdce. K této rysce přisuneme šoupátkem to číslo stupnice X_Z, které má stejné číslice jako dělitel. Číslice výsledku pak čteme na stupnici X buďto pod ryskou 1 stupnice X_Z, v tom případě je řád podílu roven rozdílu řádů dělence a dělitele, nebo pod ryskou 10, potom je řád o 1 menší než rozdíl řádů dělence a dělitele.

Příklad 6. Vypočítejte $\frac{33\,400 \, . \, 2,98 \, . \, 0,27 \, . \, 221 \, . \, 0,009\,4}{7,65 \, . \, 0,044 \, . \, 1\,430 \, . \, 815 \, . \, 12,9}$.

Máme-li provést několik násobení a dělení za sebou, snažíme se co nejméně posunovat šoupátkem. Začínáme vždy nejdříve dělením a dále **střídavě násobíme a dělíme** $\left(\frac{a}{b} \nearrow \frac{c}{d} \nearrow \frac{e}{f} \nearrow \ldots \text{atd.}\right)$, neboť koncová poloha šoupátka při dělení je výchozí polohou pro násobení; pouze v případech, kdy následující činitel je mimo pravítko, musíme šoupátko posunout o celou délku doleva nebo doprava. Řád výsledku určíme tak, že sečteme řády čitatele, odečteme součet řádů jmenovatele a za každé posunutí šoupátka během výpočtu o celou délku doleva přičteme 1 a za posunutí doprava odečteme 1. Podle toho je

$$\frac{33\,400 \, . \, 2,98 \, . \, \overset{-1}{0,27} \, . \, \overset{+1}{221} \, . \, 0,009\,4}{7,65 \, . \, 0,044 \, . \, 1\,430 \, . \, 815 \, . \, 12,9} = 1,1 \, . \, 10^{-2} = 0,011,$$

neboť řád je $(4 + 0 - 1 + 2 - 3) - (0 - 2 + 3 + 2 + 1) - 1 + 1 = -2$.

Druhá a třetí mocnina a odmocnina

Nastavíme-li rysku jezdce na kterékoliv číslo 1 — 10 stupnice X, ukazuje nám tato ryska na kvadratické stupnici X^2 **druhou mocninu** a na kubické stupnici X^3 **třetí mocninu** tohoto čísla. Ke každému číslu 1—100 stupnice X^2 a 1 až 1 000 stupnice X^3 můžeme naopak na stupnici X najít druhou a třetí odmocninu.

Chceme-li určit mocninu libovolného čísla, vyjádříme toto číslo podle (2) ve tvaru

$$N = N_0 \, . \, 10^n, \text{ potom } N^2 = N_0^2 \, . \, 10^{2n} \text{ a } N^3 = N_0^3 \, . \, 10^{3n}.$$

Příklad 7.

a) $3\,270^2 = 3,27^2 \, . \, 10^{2.3} = 10,7 \, . \, 10^6 = 10\,700\,000$,
b) $0,23^2 = 2,3^2 \, . \, 10^{-2} = 0,053$,
c) $435^3 = 4,35^3 \, . \, 10^{3.2} = 82 \, . \, 10^6 = 82\,000\,000$,
d) $1,79^3 = 5,7$.

Máme-li vypočítat druhou odmocninu čísla, musíme ho napsat ve tvaru

$N = N_2 \,.\, 10^{2k}$, $1 \leqq N_2 < 100$, potom $\sqrt{N} = \sqrt{N_2} \,.\, 10^k$

a pro třetí odmocninu

$N = N_3 \,.\, 10^{3k}$, $1 \leqq N_3 < 1\,000$, potom $\sqrt[3]{N} = \sqrt[3]{N_3} = 10^k$.

Příklad 8.

a) $\sqrt{0{,}265} = \sqrt{26{,}5 \,.\, 10^{-2}} = 5{,}15 \,.\, 10^{-1} = 0{,}515$,

b) $\sqrt{18\,600} = \sqrt{1{,}86 \,.\, 10^4} = 1{,}36 \,.\, 10^2 = 136$,

c) $\sqrt[3]{0{,}057} = \sqrt[3]{57 \,.\, 10^{-3}} = 3{,}85 \,.\, 10^{-1} = 0{,}385$,

d) $\sqrt[3]{570\,000} = \sqrt[3]{570 \,.\, 10^3} = 83 \,.\, 10^1 = 830$.

Goniometrické funkce

a) **sin** α, **tg** α. Stupnice označená $\sphericalangle$ sin udává úhly α ve stupních, k nimž příslušnou hodnotu sin α nalezneme pomocí rysky jezdce na stupnici X. Protože rozsah stupnice $\sphericalangle$ sin je obvykle $5{,}8° \leqq \alpha \leqq 90°$, je řád sin α roven -1. Podobně ke každému úhlu α stupnice označené $\sphericalangle$ tg nalezneme na stupnici X hodnotu tg α. Rozsah stupnice $\sphericalangle$ tg je pouze $5{,}8° \leqq \alpha \leqq 45°$, proto i řád tg α je -1. Dělení stupnic $\sphericalangle$ sin a $\sphericalangle$ tg je u některých pravítek desetinné, u některých minutové.

Příklad 9.

$$\sin 25{,}6° = \sin 25°36' = 4{,}32 \,.\, 10^{-1} = 0{,}432,$$
$$\mathrm{tg}\ 10{,}5° = \mathrm{tg}\ 10°30' = 1{,}85 \,.\, 10^{-1} = 0{,}185.$$

b) **cos** α, **cotg** α určujeme pomocí vztahů

$$\cos \alpha = \sin (90° - \alpha), \qquad \mathrm{cotg}\ \alpha = \mathrm{tg}\ (90° - \alpha).$$

Příklad 10.

$$\cos 83°30' = \sin 7°30' = 1{,}35 \,.\, 10^{-1} = 0{,}135,$$
$$\mathrm{cotg}\ 76°30' = \mathrm{tg}\ 13°30' = 2{,}4 \,.\, 10^{-1} = 0{,}24.$$

Tímto způsobem však můžeme určit cotg α pouze pro $45° \leqq \alpha < 90°$, neboť tg α umíme určit jen pro $0° < \alpha \leqq 45°$. K určení ostatních hodnot užijeme reciproké stupnice označené $\frac{1}{x}$; na této stupnici jsou

převrácené hodnoty čísel stupnice x_Z. Počítáme podle vztahů

$$\mathrm{tg}\ \alpha = \frac{1}{\mathrm{cotg}\ \alpha}, \quad \mathrm{cotg}\ \alpha = \frac{1}{\mathrm{tg}\ \alpha}.$$

Příklad 11.

$$\mathrm{cotg}\ 15°30' = \frac{1}{\mathrm{tg}\ 15°30'} = 3{,}6,$$
$$\mathrm{tg}\ 78° = \frac{1}{\mathrm{tg}\ 12°} = 4{,}7.$$

CVIČENÍ

Všechny výpočty v tomto cvičení provádějte na logaritmickém pravítku.

1. Vypočítejte:

a) $0{,}046\,5 \,.\, 322$; b) $2{,}84 \,.\, 1{,}33$;
c) $0{,}037\,6 : 77{,}5$; d) $7\,350 : 0{,}515$;
e) $363 \,.\, 0{,}81 \,.\, 0{,}56 \,.\, 7\,050$;
f) $95\,800 \,.\, 0{,}030\,5 \,.\, 1{,}06 \,.\, 0{,}006\,3$;
g) $\dfrac{2{,}43 \,.\, 0{,}004\,25 \,.\, 1\,270}{16{,}4 \,.\, 0{,}62 \,.\, 0{,}139}$;
h) $\dfrac{0{,}312 \,.\, 158 \,.\, 214 \,.\, 26{,}6 \,.\, 1\,190}{11\,700 \,.\, 358 \,.\, 0{,}905 \,.\, 860}$.

2. Vypočítejte zrychlení, nabude-li těleso, pohybující se rovnoměrně zrychleným pohybem, za dobu t rychlosti v:

a) $t = 3{,}52\mathrm{s}$; $v = 23{,}4\mathrm{ms}^{-1}$;
b) $t = 77{,}5\mathrm{s}$; $v = 0{,}174\mathrm{ms}^{-1}$.

3. Pomocí schématu jediného dělení s hlavními prvky řešte soustavu

$$\begin{aligned} 0{,}36x_1 - 2{,}42x_2 + 0{,}24x_3 &= 1{,}23; \\ 1{,}65x_1 \qquad\quad - 0{,}35x_3 &= 0{,}64; \\ 2{,}14x_1 + 0{,}15x_2 + 0{,}23x_3 &= 0{,}17. \end{aligned}$$

4. Pomocí logaritmického pravítka řešte soustavy ze cvičení na str. 55—56.

5. Vypočítejte:

a) $0{,}056\,5^2$; b) $73{,}5^2$;
c) $24{,}6 \,.\, \sqrt{260}$; d) $14{,}1 \,.\, 127 \,.\, \sqrt{0{,}21}$;
e) $14{,}8^3$; f) $\sqrt[3]{0{,}054}$.

6. Vypočítejte velikost pohybové složky na nakloněné rovině ($F_1 = F \, . \sin \alpha$), je-li:

a) $F = 57\text{kp}$; $\alpha = 26°$;

b) $F = 38\text{kp}$; $\alpha = 15°$.

7. Určete:

a) $\cos 80°30'$;

b) $\text{tg}\, 71°30'$;

c) $\text{cotg}\, 7°30'$;

d) $\text{cotg}\, 77°30'$.

Výsledky cvičení

I. NEÚPLNÁ ČÍSLA

3. 0,02. **4.** 0,004; 0,005; 0,006. **5.** První. **6.** π. **7.** 0,04. **8.** 0,004 %, 0,4 %. **9.** Pět. **10.** $3{,}1 \pm 0{,}2$. **11.** $0{,}11 \pm 0{,}01$. **12.** $2{,}235 \pm 0{,}001$. **13.** $0{,}714 \pm 0{,}003$. **14.** $23 \, . \, 10^8$. **15.** $S = 8\,767 \text{ km}^2$, $\delta \leqq \dfrac{1}{16 \, . \, 10^2}$, tři. **16.** $(2\,580 \pm 40)$ at; 1,5 %.

II. ŘEŠENÍ SOUSTAV LINEÁRNÍCH ROVNIC

1. (20, 17, 5). **2.** $\left(\dfrac{55}{4}, \dfrac{55}{4}, \dfrac{55}{4}\right)$. **3.** (0; 0,5; 0). **4.** (3, 2, 1). **5.** (8, 5, 3). **6.** (1, 2, 3). **7.** (1, 3, 5). **8.** (15, 12, 10). **9.** Soustava nemá řešení. **10.** (7, 5, −3). **11.** (1, −1, 2). **12.** Soustava nemá řešení. **13.** (20, 30, 40). **14.** $\left(\dfrac{1 - 3\alpha - \beta}{2}, \alpha, \beta\right)$. **15.** (1, 2, −1). **16.** $(\alpha - 1, \alpha - 2, \alpha)$. **17.** (−1, 1, 0). **18.** (0, −2, 1). **19.** Soustava nemá řešení. **20.** (1, −1,2). **21.** $\left(\dfrac{20 - 10\alpha}{17}, \dfrac{-15 + 16\alpha}{17}, \alpha\right)$. **22.** $\left(\dfrac{101}{37}, -\dfrac{8}{37}\right)$. **23.** $\left(-\dfrac{71}{287}, \dfrac{160}{287}\right)$. **24.** (0, −2). **25.** a) $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; b) $\dfrac{n^2 \, . \, (n+1)^2}{4}$; c) $\dfrac{n \, . \, (2n+1) \, . \, (2n-1)}{3}$; d) $n^2 \, . \, (2n^2 - 1)$; e) $\dfrac{n \, . \, (12n^2 - 7)(2n+1)(2n-1)}{15}$. **26.** a) $\left(\dfrac{1+\alpha}{2}, -\alpha, -\dfrac{3+7\alpha}{2}, \alpha\right)$; b) (1, 1, 1, 1); c) $\left(2 + 4\alpha, \dfrac{\alpha - 1}{2}, \dfrac{3 - 11\alpha}{2}, \alpha\right)$; d) soustava nemá řešení; e) (1, −4, 0, 3, −5); f) (3, −4, 1, 0, −5). **28.** a) (0,61; −0,88; 0,42); b) (0,440 89; −0,363 04; 1,166 81; 0,393 58); c) (2,42; 3,61; 0,46; −2,95);

d) (1,040 59; 0,986 97; 0,935 05; 0,881 30). **29.** $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$. **30.** (0,76; −0,21; 0,82); (0,92; −0,59; 0,86); (−0,51; 0,21; −0,82); (−0,84; −0,17; 0,67). **31.** (0, −7, 6, −2, −1, 9, 2, 11, −5, 8, 3). **32.** 2. **33.** 2. **34.** 2. **35.** 3. **36.** 3. **37.** 3. **38.** 3. **39.** 2. **40.** 3. **41.** 5. **42.** 3. **43.** (2, 2, 12). **44.** Soustava nemá řešení. **45.** (1, 2, 0, −2, 3). **46.** $\left(\frac{3\alpha + 8\beta}{7}, \frac{8\alpha - 2\beta}{7}, \alpha, \beta\right)$. **47.** $\left(\frac{1+\alpha}{2}, -\alpha, -\frac{7\alpha + 3}{2}, \alpha\right)$. **48.** $\left(\frac{2}{3}, 2, -\frac{2}{3}\right)$. **49.** $(1, 1-\alpha, -\alpha, \alpha)$. **50.** Soustava nemá řešení. **53.** a) $\left(\frac{23}{37}, \frac{25}{37}\right)$; b) $\left(\frac{11}{24}, \frac{5}{12}\right)$; c) soustava nemá řešení; d) $\left(\frac{38}{179}, \frac{441}{179}\right)$. **54.** a) $\left(\frac{109}{24}, -\frac{35}{24}, -\frac{31}{12}\right)$; b) soustava nemá řešení; c) $\left(\frac{95}{207}, \frac{-14}{23}, \frac{-146}{207}\right)$; d) soustava nemá řešení. **55.** a) $-\frac{1}{2}$; b) $-\frac{3}{2}$; c) 3; d) $\frac{3}{7}$. **56.** a) (11, 45); b) (3, 1). **57.** (12, 288, 12, 288, 34 560). **58.** a) 15; b) −44; c) $(x+y+z)(x+y-z)(x-y+z)(x-y-z)$; d) −5; e) *abcd*; f) 48; g) 199; h) 542; i) 51. **59.** (2, 6, 180, 12 960). **60.** a) 0; b) −120 000. **61.** a) (3,3); b) $\left(\frac{2}{7}, 1, \frac{1}{13}\right)$; c) soustava nemá řešení. **62.** $\left(-\frac{23}{19}, \frac{2}{19}, \frac{3}{19}, \frac{8}{19}\right)$. **63.** (1, −1, −1, 1, 1). **64.** (0,84; 0,88; 0,91; −0,05; −0,32). **65.** $\left(0{,}2, \frac{1}{6}, -3, -\frac{1}{12}\right)$. **66.** (1, 0, 0, 2, 3). **68.** Soustava nemá řešení. **71.** (0,50; 0,08; −0,48; 0,39). **72.** (2,41; 0,66; −1,12; 3,26). **73.** a) (0,737; 1,001; 0,627); b) (0,555 8; 0,874 8; 0,191 8). **74.** (4,67; 76,2; 90,5). **75.** (0,120; 0,200; −0,325; 0,100; −0,220).

IV. PŘIBLIŽNÉ METODY ŘEŠENÍ ROVNIC O JEDNÉ NEZNÁMÉ

1. Ano. **3.** a) −3; 1; b) 1,5; c) 2; d) 1,7; 1; 1,7; e) nemá reálné kořeny; f) −0,5; 4,5; g) 2,5; h) 1, −2, −4. **4.** 0,6. **5.** a) −0,9; 1,1; b) nemá reálné kořeny. **6.** a) 11; 4,162; b) 21; 5,46. **7.** Ano. **8.** Žádný. **11.** 1,416; −2,532; −1,347; 0,879. **12.** 2,414 21.

V. NUMERICKÁ INTEGRACE

1. $\frac{101}{60}$. **3.** 0,834 7. **4.** 0,835 66.

VI. LOGARITMICKÉ PRAVÍTKO

1. a) 15; b) 3,78; c) 0,000 485; d) 14 300; e) 1 160 000; f) 19,5; g) 9,27; h) 0,102. **2.** a) 6,65 $\mathrm{ms^{-2}}$; b) 0,002 24 $\mathrm{ms^{-2}}$. **3.** (0,21; −0,56; −0,84). **5.** a) 0,003 2; b) 5 400; c) 386; d) 820; e) 3 250; f) 0,378. **6.** a) 25 kp; b) 9,8 kp. **7.** a) 0,165; b) 2,98; c) 7,6; d) 0,222.

OBSAH

Záznam o použití učebnice

Poř. číslo	Jméno žáka	Školní rok	Stav učebnice	
			na začátku škol. roku	na konci škol. roku
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				

Edice Učebnice pro gymnázia

Milan Vlach, Zdeněk Kynel

NUMERICKÉ VÝPOČTY

pro I. a II. ročník gymnázií se zaměřením
na programování a obsluhu počítacích strojů

Obálku navrhl Miroslav Juna
Vydání 4. — Praha 1977 — Počet stran 196
Odpovědný redaktor: Stanislav Horák
Výtvarná redaktorka: Milada Slaninová
Technická redaktorka: Marcela Plšková

Vytiskl ofsetem Tisk, knižní výroba, n. p., Brno, závod 1
AA 8,95 (8,56 AA textu, 0,39 AA grafiky) — VA 9,37
Náklad 2 000 výtisků
Tematická skupina a podskupina 03/2

Cena vázaného výtisku Kčs 11,00
101/23,851

Vydalo Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze
jako svou publikaci č. 75-10-31

14-298-77 Kčs 11,00